ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATIC INSTITUTE

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

А.Н. Козырев

Стратификации и трансверсальность в математической теории экономического равновесия

Препринт # WP/2001/127

МОСКВА
2001

Козырев А.Н., Стратификации и трансверсальность в математической теории экономического равновесия / Препринт # WP/2001/127. М.: ЦЭМИ РАН, 2001. 49с. (Рус)

С использованием элементов теории стратификации и параметрических теорем трансверсальности усилена теорема Дебре-Смейла о конечности числа равновесий в модели обмена. Доказаны аналогичные теоремы для модели экономики с эндогенным техническим прогрессом и двухэтапным ценообразованием, а также теорема о конечности числа уравновешенных состояний в задаче векторной оптимизации. В отличие от ранее известных теорем того же типа ни в одной из полученных теорем не предполагается выполнение каких-либо граничных условий, т.е. равновесия могут лежать на границе множества достижимых состояний.

Препринт рассчитан на специалистов в области математической экономики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-06-80152а).

Kozyrev A.N., Stratifications and Transversality in The Mathematical Theory of General Equilibrium / Working Paper # WP/2001/127. – Moscow, CEMI, Russian Academy of Sciences, 2001. 49p. (Rus.)

Using elements of the stratification theory and parametrical transversality theorems the Debreu-Smale theorem on finiteness of number of equilibria in exchange model is strengthened. Similar theorems for the equilibrium model of economy with endogenous technical progress and two level pricing and also the theorem of finiteness of number of the counterbalanced states in a model of vector optimization are proved. As against earlier known theorems of the same type in one of the received theorems executing any boundary conditions is not supposed, i.e. equilibria may lay on the boundary of the set of achievable states.

The paper is intended for researchers in Mathematical Economics.

This work was supported by Russian Foundation of Fundamental Research (project № 01-06-80152a)

Ответственный редактор –

Оглавление

1. Введение

Вопрос о числе равновесных состояний экономики возник вместе с теорией экономического равновесия и по мере ее развития принимал все более законченную математическую форму. Для основателя теории равновесия Л.Вальраса удовлетворительным ответом на данный вопрос представлялась простая ссылка на совпадение числа уравнений, описывающих модель, с числом независимых переменных, откуда он делал вывод о единственности состояния равновесия. Аналогичные по сути рассуждения лежат и в основе современного подхода к вопросу, однако дело не сводится лишь к подсчету числа уравнений и переменных [1]. Основная трудность заключается в обосновании правомерности такого подсчета [2]. Обычно она преодолевается с привлечением соображений общего положения [3]. Но и после этого совпадение числа уравнений с числом переменных еще не является основанием для вывода о единственности состояния равновесия, хотя влечет дискретность множества таких состояний. В случае компактности множества равновесий отсюда следует его конечность, но не более. Единственность равновесия гарантируется только при дополнительных условиях довольно специального вида, таких как близость начального распределения запасов к границе Парето в модели рынка [2] или условие однородности функций полезности в модели с фиксированными бюджетами [4]. Более того, неединственность равновесия в моделях достаточно общего вида воспринимается сейчас скорее как правило, чем исключение.

Направление в математической теории экономического равновесия, которому принадлежит настоящая работа, инициировано работой Дж. Дебре [5], где впервые появилось понятие регулярной экономики и была доказана теорема о конечности числа равновесий. В последующих работах, например в [6, 7, 8], а также в [3] понятие регулярной экономики неоднократно модифицировалось и получались соответствующие теоремы о конечности числа равновесий. Все они могут быть классифицированы по трем признакам. Во-первых, надо различать теоремы, сформулированные для существенно разных моделей, т.е. для моделей чистого обмена и моделей производства, учитывающих внешние влияния в потреблении, наличие технического прогресса и т.п., либо не учитывающих подобного рода эффектов. Во-вторых, различаются определения регулярной экономики и, следовательно, теоремы о конечности числа равновесий при описании интересов потребителей через функции спроса, обратного спроса [9] или функции полезности. Наконец, в третьих, имеет смысл различать теоремы, основанные на разных понятиях общего положения и, следовательно, на использовании разной математической техники, как правило, достаточно сложной. Различных хотя бы по одному из трех перечисленных признаков теорем, как легко догадаться, может быть много, а сравнение их весьма затруднительно, причем теоремы могут быть практически сколь угодно сложными в силу постоянного развития используемой математической техники (давно уже недоступной для понимания экономистов).

Развитие направления в целом можно представить как своего рода парадокс, так как, с одной стороны, открывается почти не ограниченное поле деятельности по конструированию определений регулярной экономики и доказательству новых теорем о конечности числа равновесий, с другой стороны, становится все более очевидным, что при наличии развитой математической техники всегда можно выбрать подходящее определение регулярной экономики и свести вопрос о дискретности множества равновесий к совпадению числа уравнений модели с числом переменных. Иными словами, можно считать почти состоявшимся частичный возврат к исходной позиции Л.Вальраса. Возврат надо признать лишь частичным, так как речь идет не о единственности равновесия, а только о дискретности множества равновесий, к тому же современные модели равновесия не формулируются в виде систем уравнений, а иногда и не сводятся к таким системам. Вместе с тем, стандартный путь доказательства теорем о конечности числа равновесий включает построение системы уравнений, число которых совпадает с числом переменных, причем каждому равновесию модели соответствует решений данной системы, хотя обратное не обязательно. Эта часть доказательства, как правило, элементарна, т.е. не требует сколько-нибудь сложной математической техники, но именно в ней заключается суть дела, так как количество уравнений и переменных определяется исходной моделью. Когда же такая система получена, остается лишь подходящим образом выбрать пространство всех экономик и подмножество регулярных экономик в этом пространстве. Технически эта часть доказательств намного сложнее, чем построение системы уравнений, так как она опирается на разные варианты теоремы Р.Тома о трансверсальности и на теорию стратифицированных многообразий. Однако, ее осуществимость при наличии свободы выбора определений и развитой системы технических приемов не должна вызывать сомнений. Как один из шагов к такому положению и, следовательно, к исходной позиции Л.Вальраса может рассматриваться данная работа, тогда как чисто формально она направлена на развитие техники доказательства теорем о конечности числа равновесий.

Цель настоящей работы – избавление от характерных для ранее известных теорем о конечности числа равновесий ограничений, таких как гладкость предпочтений и наличие граничных условий, заведомо исключающих попадание равновесий на границу множества достижимых состояний, а также получение аналогичных теорем для новых моделей экономического равновесия. Речь здесь идет о конечности числа равновесий в модели с двухэтапным ценообразованием при наличии эндогенного технического прогресса. и о конечности числа уравновешенных состояний для задачи векторной оптимизации [10], т.е. о двух оригинальных математико-экономических концепциях, сходство которых сводится к совпадению числа переменных модели с числом уравнений или других эквивалентных им условий. Реализация поставленной цели достигается частично благодаря расширению понятия регулярной экономики, а частично – применению теории стратифицированных множеств и наиболее сильных вариантов теоремы о трансверсальности. А именно, не совсем обычное понятие регулярной экономики понадобилось только для того, чтобы получить теорему о конечности числа равновесий в модели рынка с функциями полезности в виде минимума нескольких гладких функций, тогда как избавление от граничных условий достигается только за счет применения теории стратифицированных многообразий Дж.Мазера [11].

В тексте без специальных оговорок используются обозначения, принятые в выпуклом анализе. В частности:

$x \cdot y$ – скалярное произведение векторов x и y;

clA – замыкание множества A;

$intA$ – внутренность множества A;

coA – выпуклая оболочка множества A;

$con\{y_i\}_{i=1}^{m}$ – конус с направляющими $y_i, i = \overline{1, m}$;

$A \oplus B$ – прямая сумма множеств $A \subset I\!R^l$ и $B \subset I\!R^n$;

X/σ – факторпространство по разбиению σ;

$D^k u(x)$ – производная порядка k отображения u в точке x;
$\wedge u_k$ – функция-минимум конечного набора функций $u_k, k \in M$;
$|M|$ – число элементов конечного множества M;
$M \backslash j$ – множество M без элемента j;
$dim U$ – размерность многообразия U;
$det A$ – определитель матрицы A.

Обозначения, принятые в дифференциальной топологии, поясняются по мере необходимости, так как не предполагается знакомство читателя со всей цитируемой ниже литературой по этому предмету. По сходным причинам имеет смысл привести здесь основные определения и необходимые для дальнейшего сведения из теории трансверсальности Р.Тома, а также теории стратификации полуалгебраических множеств. Все эти сведения собраны в специальный раздел (раздел 2).

Основное содержание работы составляют разделы 3 – 5. В разделе 3 формулируется понятие регулярной экономики чистого обмена с более широким по сравнению с [6, 7] выбором возможных функций полезности. Если в [6, 7] это дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие специальному граничному условию, то здесь – функции минимума конечного набора дважды непрерывно дифференцируемых функций без каких-либо специальных граничных условий. Доказывается теорема о конечности числа равновесий регулярной экономики и о представительности, т.е. открытости и плотности множества всех регулярных экономик.

В разделе 4 рассматривается задача векторной оптимизации с наборами основных и вспомогательных критериев [10]. Показано, что для почти всех таких задач множество уравновешенных состояний дискретно и замкнуто, а при некоторых дополнительных условиях – конечно.

В разделе 5 доказана теорема о конечности числа равновесий в модели экономики с эндогенным техническим прогрессом и двухэтапным ценообразованием.

Список цитируемой литературы ни в какой мере не претендует на полноту. Ранние работы по конечности множества равновесий, не упоминаемые здесь, можно найти в [12], ссылки на более поздние работы есть в [8]. Сведения о трансверсальных отображениях заимствованы в основном из [13] и [14], о стратификациях – из [11] и [15] .

2. Стратификации и трансверсальность

2.1. Сильная и слабая топологии

Все рассматриваемые далее многообразия являются многообразиями без края, причем с самого начала они погружены в $\mathbb{R}^n$. Более того, любое из рассматриваемых многообразий получается в виде решения конечного набора полиномиальных равенств и строгих неравенств. Благодаря этому оказывается возможным упростить некоторые достаточно громоздкие конструкции и определения, не поступаясь при этом строгостью и подробностью изложения. Без определения здесь используются только простейшие понятия, имеющие очевидный в данном контексте смысл. Исключения составляет только понятие банахова многообразия, используемое в формулировке параметрической теоремы трансверсальности [13]. Но эта теорема применяется в сравнительно простой ситуации, когда соответствующее многообразие является банаховым пространством.

Обозначим через $C^r(X,Y)$ векторное пространство отображений многообразия X в многообразие Y, имеющих непрерывные производные до порядка r включительно. Сильная топология или C^r-топология Уитни на множестве $C^r(X,Y)$ может быть задана с помощью фундаментальной системы окрестностей вида

$$N(f,\epsilon) = \{g \in C^r(X,Y) \mid d(f(x),g(x)) < \epsilon(x), x \in X\},$$

где f пробегает все $C^r(X,Y)$, ϵ пробегает все $C(X,R_+)$, а

$$d(f(x),g(x)) = \max_{k=\overline{0,r}}\{\|D^k f(x) - D^k g(x)\|\}.$$

Заметим, что пространство C^s при $s > r$ естественным образом вкладывается в пространство C^r, поэтому можно говорить о C^r-топологии Уитни в пространстве отображений класса C^s, причем s может быть и бесконечным. Объединение C^r-топологий Уитни по всем конечным r составляет C^∞-топологию Уитни в пространстве $C^\infty(X,Y)$. Наряду с сильной топологией в пространстве отображений класса C^r мы будем рассматривать слабую или компактно-открытую топологию, которая в данном случае не отличается от топологии равномерной сходимости вместе с производными до порядка r включительно на компактных подмножествах многообразия

X. Пространство отображений класса C^r многообразия X в многообразие Y, наделенное сильной топологией, условимся обозначать $C^r_s(X,Y)$, а это же пространство, наделенное слабой топологией – $C^r_w(X,Y)$. Заметим, что множество, открытое в $C^r_w(X,Y)$, открыто в $C^r_s(X,Y)$, а множество, открытое в $C^r_s(X,Y)$, открыто в $C^s_s(X,Y)$ при любом $s > r$; т.е. сильная топология сильнее слабой, причем сильная топология тем сильнее, чем выше число учитываемых производных.

Предложение 1. *Пусть X и Y – некоторые многообразия, а r – натуральное число, тогда $C^s(X,Y)$ плотно в $C^r_s(X,Y)$ при любом $s > r$.*

Это утверждение следует из теоремы 2.6. в [14], поскольку рассматриваемые здесь многообразия имеют класс гладкости C^∞.

2.2. Струи, струйная теорема трансверсальности

Пусть $L^k_{sym}(l,m)$ – векторное пространство симметричных k-линейных отображений пространства $I\!R^l$ в $I\!R^m$. Пространство

$$J^r(l,m) = I\!R^l \times I\!R^m \times \prod_{k=1}^{r} L^k_{sym}(l,m)$$

назовем многообразием r-струй из $I\!R^l$ в $I\!R^m$, а отображение

$$j^r f : I\!R^l \to J^r(l,m),$$

определяемое формулой

$$j^r f(x) = (x, f(x), D^1 f(x), ..., D^r f(x)),$$

– r-струйным расширением отбажения

$$f \in C^s(I\!R^l, I\!R^m) \equiv C^s(l,m).$$

Как легко заметить, это отображение класса $s - r$. Отображение j^r, переводящее $f \in C^s(l,m)$ в $j^r f$, непрерывно, как в сильной, так и в слабой топологии. Более того, если наделить множество $C^s(l,m)$ топологиями, индуцированными сильной и слабой топологиями пространства $C^{s-r}(I\!R^l, J^r(l,m))$, то полученные пространства – это в точности $C^s_s(l,m)$ и $C^s_w(l,m)$.

Обозначим через T_xX касательное пространство к многообразию X в точке $x \in X$. Напомним, что отображение f из X в Y называется трансверсальным к подмногообразию $A \subset Y$ в точке x, если $f(x)$ не принадлежит A или $f(x) \in A$ и

$$D^1 f(x)(T_xX) + T_{f(x)}A = T_{f(x)}Y.$$

Отображение f, трансверсальное подмногообразию A в каждой точке из X, называется трансверсальным к A, что записывается в виде $f \pitchfork A$.

Предложение 2. *Пусть X и Y – многообразия, $A \subset Y$ – подмногообразие, а отображение $f \in C^r(X,Y)$ трансверсально к A. Тогда $f^{-1}(A)$ – подмногообразие в X, причем его коразмерность равна коразмерности A, т.е. $codim f^{-1}(A) = codim A$.*

Напомним, что множество называется массивным, если оно содержит в себе пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств.

Предложение 3. *Пусть A – C^∞ подмногообразие в $J^r(l,m)$ и $1 \le r < s \le \infty$. Тогда множество отображений из $C^s_s(l,m)$, струйные расширения которых трансверсальны к A, массивно и, следовательно, плотно в $C^s_s(l,m)$, а если A замкнуто, то множество таких отображений еще и открыто.*

Данное утверждение является частным случаем струйной теоремы трансверсальности [14], которая оказывается применимой не во всех рассматриваемых в работе ситуациях. Поэтому ниже приводятся еще два варианта теоремы трансверсальности, один из которых удобен для доказательства открытости множества трансверсальных отображений, а другой – для доказательства плотности этого множества. Чтобы сформулировать эти два утверждения, необходимо ввести еще ряд понятий.

2.3. Полуалгебраические множества и стратификации

Полуалгебраическое множество в $\mathbb{R}^n$ определяется как конечное объединение подмножеств, каждое из которых задается конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств. Если неравенств не нужно, то множество называется алгебраическим.

Предложение 4. *Образ полуалгебраического множества при полиномиальном отображении полуалгебраичен.*

Это утверждение называется теоремой Тарского-Зайденберга [11, 15].

Следуя Дж.Мазеру [11], назовем престратификацией $\mathcal{P}$ топологического пространства X разбиение пространства X на непересекающиеся подмножества, называемые стратами престатификации. Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

a) Каждый страт локально замкнут, т.е. является пересечением открытого и замкнутого множеств.

b) Разбиение $\mathcal{P}$ локально конечно.

c) Если U и V – страты, и $\bar{U} \cap V \neq \emptyset$, то $V \subset \bar{U}$.

Условие c) называется аксиомой границ.

Общее определение стратификации в [11] сложно и не нужно для дальнейшего, поэтому здесь оно не приводится. Тем не менее в тексте используется термин стратификация, когда речь идет о стратификации пространства матриц $L(l,m)$ по рангам. В данном случае речь идет о разбиении пространства на подмножества, состоящие из матриц одного ранга и называемые стратами. В [15] используется понятие стратифицированного множества, которым удобно воспользоваться и здесь, но для этого необходимо ввести еще несколько определений. Прежде всего опишем два условия, определенных Уитни [11, 17, 18] на тройку (U,V,x), где U,V – подмногообразия многообразия W, а x – точка из V. В нашем случае естественно ограничиться случаем, когда $W = \mathbb{R}^n$. Через $\overline{xy}$ условимся обозначать одномерное подпространство в $\mathbb{R}^n$, порождаемое вектором $x - y$.

Условия Уитни:

(a) Если $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность точек многообразия U, сходящаяся к x, и $\{T_{x^k}U\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность касательных пространств, сходящаяся в грассмановом многообразии $(dimU)$-плоскостей к некоторому τ, то $T_xV \subset \tau$.

(b) Если $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательности точек соответственно многообразий V и U, сходящиеся к x, причем $x^k \neq y^k$; последовательность $\{\overline{x^k y^k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к t в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$, и последовательность $\{T_{y^k}U\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к τ в грассмановом многообразии $(dimU)$-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, то $t \subset \tau$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{P}$ – престатификация множества X. Престратификация $\mathcal{P}$ называется престратификацией Уитни, если каждый ее страт есть C^1-подмногообразие, а для любых двух стратов U,V таких, что $\bar{U} \supset V$ и

$U \neq V$, пара (U, V) удовлетворяет условию b). Последнее означает, что тройка (U, V, x) удовлетворяет условию Уитни (b) при всех $x \in V$. В этом случае множество X называется стратифицированным множеством [15], а отображение f называется трансверсальным стратифицированному множеству X, если оно трансверсально каждому страту престратификации $\mathcal{P}$ множества X.

Предложение 5. *Пусть A – замкнутое стратифицированное подмножество в многообразии струй $J^r(l,m)$ и $s > r \geq 1$, тогда множество*

$$\{f \in C^s(l,m) | j^r f \pitchfork A\},$$

т.е. множество всех отображений из $C^r(l,m)$, струйные расширения которых трансверсальны к A, открыто в C^s-топологии Уитни.

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство леммы 3.1. из [15] и опирается на условие Уитни (a), которое слабее условия (b). На самом же деле достаточно еще более слабого условия на престратификацию $\mathcal{P}$ [19].

Предложение 6. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – полуалгебраические подмножества в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует гладкая престратификация Уитни $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на конечное число полуалгебраических стратов, так что каждое множество A_i – объединение стратов из $\mathcal{P}$.*

Данное утверждение представляет собой первую часть предложения 3 из [20] (вторая его часть нам не понадобится). Поскольку рассматриваемые далее множества в основном полуалгебраические, предложения 4 – 6 представляют собой достаточно удобный инструмент для исследования условий общего положения в пространствах вида $C^r(Y, Z)$.

2.4. Параметрические теоремы трансверсальности

Когда исходное пространство моделей существенно отличается от пространства $C^r(Y, Z)$, для доказательства плотности множества трансверсальных отображений удобнее пользоваться параметрической теоремой трансверсальности из [13].

Пусть F – банахово пространство, Y и Z – многообразия, а

$$\rho : F \to C^r(Y, Z)$$

– отображение. Для $f \in F$ условимся писать ρ_f вместо $\rho(f)$; т.е. отображение $\rho_f : Y \to Z$ принадлежит классу C^r. Будем говорить, что ρ есть C^r-представление, если эволюционное отображение

$$ev_\rho : F \times Y \to Z,$$

определяемое соотношением

$$ev_\rho(f, y) = \rho_f(y), \quad \forall f \in F, y \in Y,$$

является C^r отображением из $F \times Y$ в Z.

Предложение 7. *Пусть F – банахово пространство, Y и Z – многообразия, $\rho : F \to C^r(Y, Z)$ – C^r-представление, $B \subset Z$ – подмногообразие, а $ev_\rho : F \times X \to Z$ – эволюционное отображение. Определим множество*

$$F_{\pitchfork} = \{f \in F | \rho_f \pitchfork B\}$$

трансверсальных отображений и предположим, что

(1) $r > max\{0, dimY - codimB\}$;

(2) $ev_\rho \pitchfork B$.

Тогда множество $F_{\pitchfork}$ массивно и, следовательно, плотно в F.

Это утверждение представляет собой частный случай параметрической теоремы о плотности трансверсальных отображений [13], следующее – частный случай теоремы об открытости множества таких отображений.

Предложение 8. *Пусть F, Y, Z имеют тот же смысл, что и в предложении 7, B – замкнутое подмногообразие в Z, а K – компактное подмножество в Y. Если $\rho : F \to C^1(Y, Z)$ есть C^1-представление, то подмножество*

$$F_{\pitchfork K} = \{f \in F | \rho_f \pitchfork_y B, y \in K\}$$

открыто в F.

Замечание. В разделе 3 предложение 8 используется в ситуации, которая формально не укладывается в рамки условий, указанных выше; т.е. B – не многообразие. Но в данном конкретном случае B – полуалгебраическое множество, причем все определяющие его уравнения и неравенства линейны. Благодаря этому теорему можно применить к афинной оболочке каждого страта, которая является замкнутым множеством. В результате получается конечный набор открытых множеств, пересечение которых также открыто. Иными словами, теорема об открытости множества трансверсальных отображений в данном случае справедлива.

3. Конечность числа равновесий рынка

3.1. Пространство моделей обмена

Модель обмена l продуктами или товарами между m экономическими агентами полностью определяется набором функций полезности $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^m$, заданных на $I\!R^l_+$ и набором $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1}^m$ неотрицательных l-мерных векторов начальных запасов [21]. Допустимым потребительским набором считается любой неотрицательный вектор размерности l, а допустимым распределением продуктов – элемент множества

$$X(\mathbf{w}) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in (I\!R^l_+)^m | \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m w_i\},$$

где $x_i \in I\!R^l_+$ для каждого $i \in M = \{1, \dots, m\}$.

Как и в [6], ценами будем называть любой вектор p из $(l-1)$-мерной сферы $S^{l-1} = \{p \in I\!R^l | \|p\| = 1\}$.

Равновесием рынка $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ называется пара

$$(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}) \in S^{l-1} \times X(\mathbf{w}),$$

удовлетворяющая условиям:

$$u_i(\bar{x}_i) = \max\{u_i(x_i) | x_i \in I\!R^l_+, \bar{p} \cdot x_i \leq \bar{p} \cdot w_i\}; \quad \bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot w_i$$

для каждого $i \in M$.

Векторы w_i по техническим причинам удобно считать положительными. Как будет видно из дальнейшего, это не приводит к потере общности.

Относительно функций полезности предположим, что для каждого $i \in M$ функция u_i на $I\!\!R^l_+$ определяется соотношением

$$u_i(x_i) = \bigwedge_{j \in J_i} v_{ij}(x_i), \;\; x_i \in I\!\!R^l_+,$$

где v_{ij} при всех $j \in J_i$ дважды непрерывно дифференцируемы на всем $I\!\!R^l_+$. Дифференцируемость функции на границе области $I\!\!R^l_+$ понимается, как и в [6], т.е. функции v_{ij} предполагаются заданными на некоторой окрестности неотрицательного ортанта, но две функции, совпадающие на всем $I\!\!R^l_+$, не различаются. Заметим еще, что разные наборы функций $\{v_{ij}\}_{j \in J_i}$ и $\{v_{ij}\}'_{j \in J_i}$ могут давать одну и ту же функцию полезности u_i. Поэтому пару $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, где $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1}^m$ и $v_i = \{v_{ij}\}_{j \in J_i}$, нельзя отождествить с порождаемой этой парой моделью обмена, т.е. рынком, за исключением случая, когда множество J_i для каждого i состоит из единственного элемента, т.е. все функции полезности принадлежат $C^2(I\!\!R^l_+, R^1)$. С другой стороны, такое отождествление было бы очень удобным, поскольку можно понимать v_i как отображение из $I\!\!R^l_+$ в $I\!\!R^{J_i}$ с координатными функциями $v_{ij}, j \in J_i$, а пару $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ – как точку в пространстве

$$E = \prod_{i=1}^m C^2_s(I\!\!R^l_, I\!\!R^{J_i}) \times int(I\!\!R^l_+)^m.$$

Выход из кажущегося противоречия состоит в разбиении пространства E на классы эквивалентности с последующей факторизацией по этому разбиению [22]. Класс эквивалентности $[(\mathbf{v}, \mathbf{w})]$ состоит из всех пар $(\mathbf{v}', \mathbf{w}') \in E$ таких, что

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w}; \quad J_i = J'_i, \quad \bigwedge_{j \in J_i} v_{ij} = \bigwedge_{j \in J_i} v'_{ij}, \;\; \forall i \in M.$$

Полученное разбиение обозначим через σ, факторпространство по этому разбиению – через E/σ, а естественную проекцию E на E/σ – через π.

Теорема 1. *Существует открытое всюду плотное в E подмножество $E_{\pitchfork}$ такое, что для всякого рынка $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ из $\pi E_{\pitchfork}$ множество состояний равновесия конечно.*

Доказательство теоремы 1. опирается на целую серию вспомогательных лемм, которые собраны в следующем подразделе.

Замечание 1. В пространстве E/σ можно естественным образом задать топологию, считая произвольное множество $A \in E/\sigma$ открытым, если $\pi^{-1}[A]$ открыто в E. Множество $\pi(E_{\pitchfork})$ плотно в E/σ, так как проекция π непрерывна и отображает E на все E/σ. Однако, открытость множества $\pi(E_{\pitchfork})$ гарантировать нельзя, так как, вообще говоря, $\pi^{-1}[\pi(E_{\pitchfork})] \neq E_{\pitchfork}$.

Замечание 2. Если для каждого i множество J_i состоит из одного элемента, то каждый класс $[(\mathbf{v}, \mathbf{w})]$ состоит из единственного элемента, т.е. переход к факторпространству не нужен. В результате получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует открытое всюду плотное подмножество $E_{\pitchfork}$ пространства E такое, что для каждого рынка $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ из $E_{\pitchfork}$ множество состояний равновесия конечно.*

Доказательство. Следует непосредственно из теоремы 1..

Теорему 2. можно рассматривать как усиление известных теорем о конечности числа равновесий. Пространство рынков здесь то же, что и в [6], но какие-либо граничные условия не требуются.

3.2. Вспомогательные леммы

Чтобы переписать условия из определения равновесия в более удобном для дальнейшего использования виде введем еще ряд обозначений. В частности, обозначим через $ex_{\mathbf{w}}$ и G_v отображения, определяемые как

$$ex_{\mathbf{w}}(p, \mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^{m}(w_i - x_i), \{p \cdot (w_i - x_i)\}_{i=1}^{m})$$

при любых

$$p \in S^{l-1}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I\!R^{lm}$$

и

$$G_{\mathbf{v}}(p, \mathbf{x}, \alpha, \lambda) = (\{\sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} D^1 v_{ij}(x_i) - \lambda_i p\}_{i=1}^{m})$$

при $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где

$$\alpha_i = \{\alpha_{ij}\}_{j \in J_i} \quad \forall i \in M,$$

и
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in I\!R^m.$$
Через $\underline{\Delta}$ обозначим диагональ пространства $I\!R^m$, т.е.
$$\underline{\Delta} = \{\xi \in I\!R^m | \xi_j = \xi_{j'}, \forall j, j' \in M\}.$$
Для каждого i в пространстве $I\!R^{J_i}$ выделим подмногообразие
$$P^{J_i} = \{\eta \in I\!R^{J_i} | \sum_{j \in J_i} \eta_j = 1\}$$
и положим $P_+^{J_i} = P^{J_i} \cap I\!R_+^{J_i}$.

Каждому подмножеству I множества $M \times L$, где $L = \{1, \ldots, l\}$, сопоставим подмножества
$$X(I) = \{\mathbf{x} \in (I\!R^l)^m | x_{ik} = 0, \forall (i,k) \notin I\}$$
и
$$X^\perp(I) = \{\mathbf{x} \in (I\!R^l)^m | x_{ik} = 0, \forall (i,k) \in I\}$$
в пространстве $(I\!R^l)^m$. Аналогично, каждому $K = \{K_i\}_{i=1}^m$, где $K_i \subset J_i$ сопоставим подмногообразие
$$A(K) = \{\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m P^{J_i} | \alpha_{ij} = 0, \forall j \in K_i, i \in M\}$$
в пространстве $\prod_{i=1}^m I\!R^{J_i}$ и полуалгебраическое множество
$$B(K) = \{\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m I\!R^{J_i} | \beta_{ij''} \geq \beta_{ij} = \beta_{ij'}, \forall j, j' \in K_i, j'' \notin K_i, i \in M\}$$
в пространстве $\prod_{i=1}^m I\!R^{J_i}$. В соответствии с предыдущим положим:
$$A_+(K) = A(K) \bigcap (I\!R_+^l)^m;$$
$$X_+(I) = X(I) \bigcap (I\!R_+^l)^m; \quad X_-^\perp(I) = X^\perp(I) \bigcap (-I\!R_+^l)^m).$$
Коразмерность подмногообразия
$$Z(I,K) = O \times X(I) \times B(K) \times X^\perp(I) \times A(K)$$

в многообразии

$$Z = (I\!\!R^l \times I\!\!R^m/\underline{\Delta}) \times (I\!\!R^l)^m \times \prod_{i=1}^m I\!\!R^{J_i} \times (I\!\!R^l)^m \times \prod_{i=1}^m P^{J_i},$$

где $O \in I\!\!R^l \times I\!\!R^m/\underline{\Delta}$, равна

$$l + (m-1) + lm + \sum_{i=1}^m (|K_i| - 1 + |J_i| - |K_i|) = l - 1 + lm + \sum_{i=1}^m |J_i|,$$

т.е. совпадает с размерностью многообразия

$$Y = S^{l-1} \times (I\!\!R^l)^m \times \prod_{i=1}^m P^{J_i} \times I\!\!R^m.$$

Каждой паре $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ из E сопоставим отображение

$$\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}} : Y \to Z,$$

переводящее четверку $(p, \mathbf{x}, \alpha, \lambda)$ в

$$\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(p, \mathbf{x}, \alpha, \lambda) = (ex_{\mathbf{w}}(p, \mathbf{x}), j^0\mathbf{v}(\mathbf{x}), G_{\mathbf{v}}(p, \mathbf{x}, \alpha, \lambda), \alpha),$$

где $j^0\mathbf{v}(\mathbf{x}) = ((x_1, \ldots, x_m), [v_1(x_1), \ldots, v_m(x_m)])$.

В подмногообразии $Z(I, K)$ выделим замкнутое подмножество

$$Z_+(I, K) = O \times X_+(I) \times B(K) \times X_-^{\perp}(I) \times A_+(K).$$

Лемма 1. *Если* $(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}})$ *– равновесие рынка* $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, *где*

$$u_i = \bigwedge_{j \in J_i} v_{ij}, \quad i \in M,$$

то найдутся

$$\bar{\alpha} \in \prod_{i=1}^m P^{J_i}, \quad \bar{\lambda} \in I\!\!R^m_+, \quad \bar{I} \subset M \times L, \quad \bar{K} = \{\bar{K}_i\}_{i=1}^m$$

такие, что

$$\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in Z_+(\bar{I}, \bar{K}).$$

Доказательство. Условие

$$ex_{\mathbf{w}}(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}) = O \in I\!\!R^l \times I\!\!R^m / \underline{\Delta}$$

выполняется в силу того, что $\bar{\mathbf{x}} \in X(\mathbf{w})$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - w_i) = O \in I\!\!R^l,$$

а для каждого i выполняется равенство $\bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot \bar{w}_i$, т.е.

$$\{\bar{p} \cdot (w_i - \bar{x}_i)\}_{i=1}^m = O \in I\!\!R^m / \underline{\Delta}.$$

Пусть

$$\bar{I} = \{(i,j) \in M \times L | \bar{x}_{ij} \neq 0\}$$

и

$$\bar{K}_i = \{k \in J_i | v_{ik}(\bar{x}_i) = \bigwedge_{j \in J_i} v_{ij}(\bar{x}_i)\}, \quad i \in M.$$

По определению $\bar{I}$ и $\bar{K} = \{\bar{K}_i\}_{i=1}^m$ имеем

$$\bar{\mathbf{x}} \in X_+(\bar{I}), \quad \mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) \equiv (v_1(\bar{x}_1), \ldots, v_m(\bar{x}_m)) \in B(\bar{K}).$$

Из условия

$$\bigwedge_{j \in J_i} v_{ij}(\bar{x}_i) = \max\{\bigwedge_{j \in J_i} v_{ij}(x_i) | x_i \in I\!\!R^l_+, \bar{p} \cdot x_i \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i\}, \quad i \in M,$$

входящего в определение равновесия, следует существование таких $\bar{\alpha} \in P_+^{J_k}$ и $\bar{\lambda}_i \geq 0$, что

$$(\sum_{j \in \bar{K}_i} \bar{\alpha}_{ij} D^1 v_{ij}(\bar{x}_i) - \bar{\lambda}_i \bar{p}) \in X_-^{\perp}(\bar{I}) - \Gamma^+(\bar{x}_i),$$

где

$$\Gamma^+(\bar{x}_i) = \{\xi \in I\!\!R^l_+ | \xi \cdot (x_i - \bar{x}_i) \geq 0, \forall \xi_i \in I\!\!R^l_+\}$$

– конус, сопряженный к конусу допустимых направлений [23] в точке $\bar{x}_i$. Действительно, функция u_i как функция минимума гладких функций квазидифференцируема [24] и даже субдифференцируема т.е. в любой точке имеет квазидифференциал вида

$$Du_i(x_i) = [\underline{\partial u_i(x_i)}, \overline{\partial u_i(x_i)}] = [\underline{\partial u_i(x_i)}, O],$$

где $\underline{\partial u_i(x_i)}$ – субдифференциал, а $\overline{\partial u_i(x_i)}$ – супердифференциал, причем субдифференциал в точке x_i вычисляется по формуле

$$\underline{\partial u_i(x_i)} = co\{D^1 v_{ij}(x_i)\}_{i \in K_i},$$

где

$$K_i = \{j \in J_i | u_i(x_i) = v_{ij}(x_i)\}.$$

Достаточное условие достижения в точке $\bar{x}_i$ максимума u_i на множестве всех $x_i \in \mathbb{R}^l_+$, удовлетворяющих неравенству $\bar{p} \cdot x_i \leq \bar{p} \cdot w_i$, записывается в виде

$$O \in \prod_{i=1}^{m} (\underline{\partial u_i(\bar{x}_i)} + \Gamma_+(\bar{x}_i) - \bar{\lambda}_i \bar{p})$$

или, что то же самое, в виде

$$G_{\mathbf{v}}(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in X_-^{\perp}(\bar{I}).$$

Таким образом, $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}) \in Z_+(\bar{I}, \bar{K})$. Ч.т.д.

Лемма 2. *Эволюционное отображение*

$$ev_\rho : E \times Y \to Z,$$

где

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \in C^1(Y, Z), \quad ev_\rho((\mathbf{v}, \mathbf{w}), y) = \Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(y),$$

субмерсивно.

Доказательство. Отображение ev_ρ непрерывно дифференцируемо в смысле Фреше по параметру $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, так как зависимость $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(y)$ от параметра $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ линейна. Непрерывная дифференцируемость по $y = (p, \mathbf{x}, \alpha, \lambda)$ следует из принадлежности функций v_i классу C^2. Производной отображения ev_ρ в произвольной точке

$$((\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}), \bar{y}) = ((\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}), (\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}))$$

из $E \times Y$ будет линейный оператор

$$D^1 ev_\rho((\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}), \bar{y}) : (E \times T_{\bar{y}} Y) \to TZ,$$

где

$$T_{\bar{y}}Y = T_{\bar{p}}S^{l-1} \times TP^{J_i} \times \prod_{i=1}^{m} (I\!R^l)^m \times I\!R^m$$

– касательное подмногообразие к Y в точке $\bar{y}$, а

$$TZ = I\!R^l \times I\!R^m/\underline{\Delta} \times (I\!R^l)^m \times \prod_{i=1}^{m} I\!R^{J_i} \times (I\!R^l)^m \times \prod_{i=1}^{m} TP^{J_i}$$

– касательное подмногообразие к Z, которое не зависит от выбора точки касания. Чтобы доказать субмерсивность эволюционного отображения, нужно получить произвольный вектор Δz из TZ в виде

$$D^1 ev_\rho[(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}),\bar{y}](\Delta\mathbf{v},\Delta\mathbf{w},\Delta y) = D^1_{\mathbf{v}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta\mathbf{v} + D^1_{\mathbf{w}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta\mathbf{w} + D^1_y\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta y,$$

где $D^1_{\mathbf{v}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})$ и $D^1_{\mathbf{w}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})$ – производные отображения $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(y)$ в точке $((\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}),\bar{y}) \in E \times Y$ по параметрам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, соответственно, а $D^1_y\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})$ – по переменной y. Для этого нужно представить вектор Δz в виде

$$\Delta z = (\Delta ex_{\mathbf{w}}, \Delta j^0\mathbf{v}(\mathbf{x}), \Delta G_{\mathbf{v}}, \Delta\alpha)$$

и подобрать подходящие $\Delta y = (\Delta p, \Delta\mathbf{x}, \Delta\alpha, \Delta\lambda)$ и $\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\Delta\mathbf{v},\Delta\mathbf{w})$. Подбирая Δy, можно взять $\Delta p = O \in T_{\bar{p}}S^{-1}$ и $\Delta\lambda = O \in I\!R^m$, а значения $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\alpha$ взять равными соответствующим компонентам вектора Δz. В результате получим

$$[\Delta z - D^1_y\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta y] \in (I\!R^l \times I\!R^m/\underline{\Delta}) \times O \ \times \prod_{i=1}^{m} I\!R^{J_i} \times (I\!R^l)^m \times O \subset TZ,$$

где нули соответствуют компонентам $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\alpha$. После этого остается заметить, что производные по параметрам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ имеют ненулевые компоненты, соответствующие ненулевым компонентам вектора

$$\Delta z - D^1_y\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta y$$

и подобрать $\Delta\mathbf{v}$ и $\Delta\mathbf{w}$ так, чтобы получить

$$D^1_{\mathbf{v}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}}},\bar{\mathbf{w}}(\bar{y})\Delta\mathbf{v} + D^1_{\mathbf{w}}\Psi_{\bar{\mathbf{v}}},\bar{\mathbf{w}}(\bar{y})\Delta\mathbf{w} = \Delta z - D^1_y\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}(\bar{y})\Delta y.$$

Покажем, что производная по параметру $\mathbf{v}$ отображает E на подпространство

$$O \times \prod_{i=1}^{m} I\!R^{J_i} \times (I\!R^l)^m \times O \subset TZ,$$

где первый и последний сомножители – это

$$O \in I\!R^l \times I\!R^m/\underline{\Delta} \times (I\!R^l)^m, \quad O \in \prod_{i=1}^{m} P^{J_i}.$$

Действительно, от параметра $\mathbf{v}$ зависит только $G_{\mathbf{v}}$, а остальные составляющие отображения $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(y)$ не зависят. Следовательно, производные других составляющих по $\mathbf{v}$ равны нулям в соответствующих пространствах. Производная отображения $G_{\mathbf{v}}(y)$ по параметру $\mathbf{v}$ может быть представлена формулой

$$D^1_{\mathbf{v}} G_{\bar{\mathbf{v}}}(y)\Delta\mathbf{v} = (\{\sum_{j\in J_i} \bar{\alpha}_{ij} D^1 \Delta v_{ij}(\bar{x}_{ij})\}_{i=1}^m),$$

где

$$\Delta\mathbf{v} \in \prod_{i=1}^{m} C_2^2(R^l, R^{J_i}).$$

Для каждого $i \in M$ положим

$$\Delta v_{ij}(x_i) = a_i(x_i - \bar{x}_i) + c_{ij}, \quad \forall j \in J_i,$$

где $a_i \in I\!R^l$ и $c_{ij(i)} \in R$. Так как для каждого i справедливо равенство

$$\sum_{j\in J_i} \bar{\alpha}_{ij} = 1,$$

в результате получим

$$D_{\mathbf{v}} G_{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}), \bar{y})\Delta\mathbf{v} = (\{a_i\}_{i=1}^m).$$

В таком виде очевидным образом можно представить любую точку из $(I\!R^l)^m$. Производная $j^0\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}})$ по $\mathbf{v}$ равна $(O, \{(c_{ij})_{j\in J_i}, \}_{i=1}^m)$. В таком виде можно представить любой вектор из $O \times \prod_{i=1}^m I\!R^{J_i}$, где $O \in (I\!R^l)^m$.

Рассмотрим теперь производную отображения $ex_{\mathbf{w}}$ по $\mathbf{w}$. Ее можно представить соотношением

$$D^1_{\mathbf{w}} ex_{\bar{\mathbf{w}}}(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}})\Delta\mathbf{w} = (\sum_{i=1}^{m} \Delta w_i, \{\bar{p} \cdot \Delta w_i\}_{i=1}^m).$$

Легко убедиться, что в таком виде представима любая точка (ξ,η) из многообразия $(I\!R^l, I\!R^m/\underline{\Delta})$. В самом деле, найдем $\Delta\mathbf{w}'$ из условия

$$\sum_{i=1}^{m}\Delta w_i' = \xi \in I\!R^l$$

и $\Delta\mathbf{w}'' \in (I\!R^l)^m$ из условий:

$$\sum_{i=1}^{m}\Delta w_i'' = 0; \quad \bar{p}\cdot\Delta w_i' + \bar{p}\cdot\Delta w_i'' = \eta_i, \;\; i\in M.$$

Затем положим $\Delta\mathbf{w} = \Delta\mathbf{w}' + \Delta\mathbf{w}''$.

Таким образом, отображение $ev_\rho : E\times Y \to Z$ – субмерсия. Ч.т.д.

Лемма 3. *Множество*

$$E_{\pitchfork}(I,K) = \{(\mathbf{v},\mathbf{w})\in E|\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\pitchfork Z_+(I,K), \forall I,K\}$$

всюду плотно в E.

Доказательство. Обозначим через $\overline{I\!R}^l$ компактификацию пространства $I\!R^l$ путем присоединения точки ∞, т.е. $\overline{I\!R}^l = I\!R^l\cup\{\infty\}$. Векторное пространство дважды непрерывно дифференцируемых отображений компакта $\overline{I\!R}^l$ в пространство $I\!R^{J_i}$ с нормой

$$\|v\| = \max_{x\in\overline{I\!R}^l}(\|v(x)\|^2 + \|D^1v(x)\|^2 + \|D^2v(x)\|^2)^{1/2}$$

обозначим через $C_2^2(\overline{I\!R}^l, R^{J_i})$. Легко заметить, что это банахово пространство. Следовательно, пространство

$$F = \prod_{i=1}^{m} C_2^2(\overline{I\!R}^l, I\!R^{J_i})\times(I\!R^l)^m$$

с очевидным образом определяемой нормой также банахово. Для каждой пары $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ из F определено отображение $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$, как для аналогичной пары из E. Для доказательства массивности и, следовательно, плотности множества

$$F_{\pitchfork} = \{(\mathbf{v},\mathbf{w})\in F|\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}\pitchfork Z_+(I,K), \forall I,K\}$$

в F естественно воспользоваться теоремой о плотности трансверсальных отображений, т.е. предложением 7.. Убедимся в выполнении условий этой теоремы при $r = 1$ и представлении

$$\rho : F \to C^1(Y, Z),$$

определяемом тождеством

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \in C^1(Y, Z).$$

Из леммы 2. следует субмерсивность эволюционного отображения

$$ev_\rho : F \times Y \to Z.$$

С учетом предложения 7. отсюда следует массивность множества $F_\pitchfork$ в F. То обстоятельство, что $Z_+(I, K)$ не является подмногообразием, в данном случае не имеет значения, так как это множество полуалгебраическое и допускает конечную престратификацию на подмногообразия размерности не больше, чем размерность $Z_+(I, K)$. Можно применить предложение 7. к каждому из полученных стратов и затем взять пересечение полученных массивных подмножеств.

Остается показать, что из плотности множества $F_\pitchfork$ в F следует плотность $E_\pitchfork(I, K)$ в E. Для этого рассмотрим произвольную пару $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}})$ из E с окрестностью $V \times W$, где $\bar{\mathbf{v}} \in V$, $\bar{\mathbf{w}} \in W$, и построим такую пару $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V \times W$, что $\Psi_{\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}}} \in E_\pitchfork(I, K)$.

Без ограничения общности можно считать окрестность W точки $\bar{\mathbf{w}}$ замкнутым шаром радиуса $\delta > 0$, а V – определить как произведение окрестностей отдельных отображений $\bar{v}_i$, каждая из которых задается с помощью некоторой положительной непрерывной функции ϵ_i на $I\!R^l_+$, т.е. окрестностью отображения $\bar{v}_i$ будет множество

$$\{v_i \in C(I\!R^l_+, I\!R^{J_i}) | d(v_i(x_i), \bar{v}_i(x_i)) < \epsilon(x_i), \ \ x_i \in I\!R^l_+\}.$$

Напомним, что функцию $\bar{v}_i$ можно считать заданной на некоторой окрестности $X_{\bar{v}_i}$ неотрицательного ортанта, а функцию $\bar{\mathbf{v}}$ – на произведении таких окрестностей, т.е. на

$$X_{\bar{\mathbf{v}}} = \prod_{i=1}^m X_{\bar{v}_i}.$$

Множество
$$X_W = \bigcup_{\mathbf{w}\in W} X(\mathbf{w})$$
компактно в $(I\!R^l_+)^m$ и, следовательно, $X_W \subset X_{\bar{\mathbf{v}}}$. Более того, найдется открытая окрестность X множества X_W такая, что $X_W \subset clX \subset X_{\bar{\mathbf{v}}}$ и clX – компакт.

Обозначим через $\hat{\varphi}_i$ функцию класса C^2 на $I\!R^l$, принимающими значения между нулем и единицей, причем $\hat{\varphi}_i(x_i) = 1$ для всех $i \in M$, если $\mathbf{x} \in X_{\mathbf{w}}$, и $\hat{\varphi}_i(x_i) = 0$ для всех $i \in M$, если $\mathbf{x} \notin X$.

Пара $(\hat{\varphi}\cdot\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}})$ очевидным образом принадлежит F, каждая из функций ϵ_i ограничена снизу на компакте clX некоторым положительным числом δ_i, т.е. $\epsilon_i(x_i) \geq \delta_i$ при любом $\mathbf{x} \in clX$, а каждая из функций
$$\|D^k\hat{\varphi}_i\|,\ \ k = 1,2;\ \ i \in M$$
ограничена сверху некоторым $\Theta \geq 1$. В силу плотности $F_{\pitchfork}$ в F найдется пара $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{w}}) \in F_{\pitchfork}$, такая что $\|\tilde{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}\| < \delta$ и
$$\|v_i - \hat{\varphi}_i\cdot\bar{v}_i\| < \delta_i/4\Theta\ \ \forall i \in M.$$
Определим набор функций $\check{\varphi}_i,\ i \in M$, положив $\check{\varphi}_i = 1 - \hat{\varphi}_i^2$. Через $\hat{\varphi}\cdot\bar{\mathbf{v}}$ или $\check{\varphi}\cdot\bar{\mathbf{v}}$ обозначим отображения с координатными функциями $\hat{\varphi}_i\cdot\bar{v}_{ij}$ и $\check{\varphi}_i\cdot\bar{v}_{ij}$, соответственно. Тогда функцию $\hat{\varphi}_i\cdot\bar{v}_{ij}$ без ограничения общности можно считать заданной на всем $(I\!R^l)^m)$. Тогда отображение $\tilde{\mathbf{v}} = \check{\varphi}\cdot\bar{\mathbf{v}} + \hat{\varphi}\cdot\mathbf{v}$ принадлежит V, а пара $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})$ принадлежит $V \times W$. В самом деле, для $\mathbf{x}$ из X имеем
$$d(\tilde{v}_i(x_i), \bar{v}_i(x_i)) = d(\hat{\varphi}_i(x_i)[v_i(x_i) - \tilde{\varphi}_i(x_i)\bar{v}_i(x_i)])$$
и
$$d(\hat{\varphi}_i(x_i)[v_i(x_i) - \tilde{\varphi}_i(x_i)\bar{v}_i(x_i)]) = \max_{k=\overline{0,2}}\|D^k(\hat{\varphi}_i(x_i)[v_i(x_i) - \hat{\varphi}_i(x_i)\bar{v}_i(x_i)])\|.$$
В силу выбора Θ и δ_i эта величина меньше $\epsilon_i(x_i)$, а вне X отображение $\tilde{\mathbf{v}}$ совпадает с $\bar{\mathbf{v}}$. С другой стороны, $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})$ принадлежит $E_{\pitchfork}(I,K)$, поскольку при $\mathbf{x} \notin X_{\mathbf{w}}$ нарушается условие неотрицательности $\mathbf{x}$ или условие $ex_{\tilde{\mathbf{w}}}(\mathbf{x}, p) = 0$; а при $\mathbf{x} \in X$ отображение $\Psi_{\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{w}}}$ совпадает с $\Psi_{\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}}$ и потому

трансверсально стратифицированному множеству $Z_+(I,K)$. Таким образом,

$$(V \times W) \cap E_{\pitchfork}(I,K) \neq \emptyset,$$

откуда следует утверждение леммы. Ч.т.д.

Лемма 4. *Для каждого* $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in E$ *множество* $\Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(Z(I,K))$ *компактно.*

Доказательство. Замкнутость множества $\Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(Z(I,K))$ следует из замкнутости $Z(I,K)$ и непрерывности $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$. Остается показать его ограниченность.

Если

$$\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(p,\mathbf{x},\alpha,\lambda) \in Z(I,K),$$

то

$$\mathbf{x} \in X_+(I), \quad \alpha \in A_+, \quad ex_{\mathbf{w}}(p,\mathbf{x}) = O,$$

и, кроме того,

$$\{-\sum_{j\in J_i} \alpha_{ij} D^1 v_{ij}(x_i) + \lambda_i p\}_{i=1}^m \in X_+^{\perp}(I) \subset \prod_{i=1}^m \Gamma_+(x_i).$$

Отсюда видно, что $p,\mathbf{x},\alpha$ ограничены, а λ_i может быть неограниченным только при условии

$$p \in \Gamma_+(x_i) = \{g \in I\!R^l_+ | g \cdot x_i = 0\},$$

но тогда $p \cdot x_i = 0$ и $p \cdot w_i > 0$ для данного i, т.е. что противоречит условию $ex_{\mathbf{w}}(p,\mathbf{x}) = 0$. Отсюда следует ограниченность Λ. Ч.т.д.

Замечание. Из компактности множества

$$Y(I,K) = \Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} Z(I,K),$$

для произвольных I,K следует компактность объединения таких множеств по всем I,K.

Лемма 5. *Множество* $E_{\pitchfork}(I,K)$ *открыто в* E.

Доказательство. Покажем, что множество $E_{\pitchfork}(I,K)$ открыто в

$$H = \prod_{i=1}^m C^2_w(I\!R^l_+, I\!R^{J_i}) \times (I\!R^l)^m,$$

т.е. в слабой топологии, откуда следует его открытость в пространстве E. Для этого построим целиком содержащуюся в $E_{\pitchfork}(I,K)$ слабую окрестность произвольной точки $(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}) \in E_{\pitchfork}(I,K)$.

Так как $\bar{\mathbf{w}} \in int(I\!R^l)^m$, можно построить компактную окрестность W точки $\bar{\mathbf{w}}$, целиком содержащуюся в $int(I\!R^l)^m$. Каждой такой окрестности соответствуют компакт $X_W = \bigcup_{\mathbf{w}\in W} X_{\mathbf{w}}$ и слабая окрестность точки $\bar{\mathbf{v}}$, представимая в виде $V = \prod_{i=1}^m V_i$, где

$$V_i = \{v_i \in C^2(I\!R^l_+, I\!R^{J_i}) | d(v_i(x_i), \bar{v}_i(x_i)) < \delta_i, \ \ \forall \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in X_W\}$$

при $\delta_i > 0$. Множество $V_i - \bar{v}_i$ с нормой

$$\|v_i - \bar{v}_i\| = \max_{\mathbf{x}\in X_W}(\|v_i(x_i) - \bar{v}_i(x_i)\|^2 + \|D^1[v_i(x_i) - \bar{v}_i(x_i)]\|^2 + \|D^2[v_i(x_i) - \bar{v}_i(x_i)]\|^2)^{1/2}$$

представляет собой банахово пространство, причем топология, порождаемая такой нормой, совпадает с топологией из $C^2_w(I\!R^l_+, I\!R^{J_i})$. Если теперь построить открытое всюду плотное в $V \times intW$ множество $\tilde{V} \times \tilde{W}$ такое, что

$$\tilde{V} \times \tilde{W} \bigcap E_{\pitchfork}(I,K) = \tilde{V} \times \tilde{W},$$

то это и будет искомая окрестность точки $(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}) \in E_{\pitchfork}(I,K)$. Для этой цели можно воспользоваться параметрической теоремой трансверсальности.

Непосредственное применение теоремы об открытости множества трансверсальных отображений, т.е. предложения 8., здесь невозможно, так как Y не компакт. С другой стороны, для каждой пары $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ из H отображение $\Psi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ может не быть трансверсальным $Z(I,K)$ только на компактном множестве $\Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(Z(I,K))$. Объединение таких множеств

$$\bigcup_{(\mathbf{v},\mathbf{w})\in V\times W} \Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(Z(I,K))$$

ограничено, т.е. содержится в некотором компакте

$$Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = S^{l-1} \times X_W \times A(K)_+ \times \Lambda,$$

где

$$\Lambda = \Lambda(V,W) = \{\lambda \in I\!R^m_+ | \lambda_i \le \delta_i(V,W), i \in M\},$$

а $\delta_i(V,W)$ – достаточно большие числа.

Предположим, что существует последовательность пар $\{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)\}_{k=1}^{\infty}$ из $V \times W$ и неограниченная последовательность точек $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$\Psi_{\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^k}(y(k)) \in Z(I,K) \quad \forall k.$$

Последовательность $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$, может быть неограниченной только благодаря неограниченности $\{\lambda(k)\}_{k=1}^{\infty}$, так как $\mathbf{x}(k) \in X_W$. Без ограничения общности последовательность $\{\|\lambda(k)\|\}_{k=1}^{\infty}$ можно считать возрастающей. Тогда последовательность

$$G_{\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^k}(y(k))/\|\lambda(k)\|\}_{k=1}^{\infty}$$

ограничена и ее без ограничения общности можно считать сходящейся. При этом последовательность

$$\{\sum_{j\in J_i} \alpha_i(k) D^1 v_i^k(x_i(k))/\|\lambda_i(k)\|\}_{k=1}^{\infty}$$

при каждом $i \in M$ сходится к нулю в силу ограниченности производных v_i^k на W. Отсюда получаем

$$\prod_{i=1}^{m} \lim_{k\to\infty} (\lambda_i(k)/\|\lambda(k)\|)p \in X_+^{\perp}(I)$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} x_i(k) \cdot p(k) = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} p \cdot w_i^k > 0.$$

С другой стороны, для каждого k имеем $ex_{\mathbf{w}^k}(p(k), \mathbf{x}(k)) = O$. Последовательности $\{p(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mathbf{w}^k\}_{k=1}^{\infty}$ без ограничения общности можно считать сходящимися к некоторым $\hat{p} \in S^{l-1}$, $\hat{x} \in clW$ и $\hat{\mathbf{w}}$. Переходя к пределу, из равенства $ex_{\mathbf{w}^k}(p(k), \mathbf{x}(k)) = 0$ получим $ex_{\hat{\mathbf{w}}}(\hat{p}, \hat{\mathbf{x}}) = 0$. Но из соотношений, полученных выше, следует

$$\hat{x}_i \cdot \hat{p} = 0; \quad \sum_{i=1}^{m} \hat{p} \cdot \hat{\mathbf{w}}_i > 0.$$

Полученное противоречие свидетельствует об ограниченности последовательности $\{\lambda(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Таким образом, найдется компакт

$$Q(V,W) = S^{l-1} \times X_W \times A_+(K) \times \Lambda(V,W)$$

такой, что
$$\Psi^{-1}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} Z(I,K) \subset Q(V \times W)$$
для всякого $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ из $V \times W$. Согласно предложению 8. подмножество пар $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ в пространстве $V \times W$, таких, что отображение $\Psi_{V,W}$ трансверсально $Z(I,K)$ во всех точках из $Q(V,W)$, открыто в $V \times intW$. Поскольку $V \times intW$ – открытое подмножество в H, полученное подмножество трансверсальных отображений $\tilde{V} \times \tilde{W}$ также открыто в H. При этом оно целиком содержится в $E_\pitchfork(I,K)$. Иными словами, окрестность $\tilde{V} \times \tilde{W}$ обладает всеми нужными свойствами.

Пусть теперь $(\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}})$ пробегает все множество E. Из доказанного выше следует существование у каждой такой пары открытой окрестности, целиком содержащейся в $E_\pitchfork(I,K)$. Следовательно, данное множество открыто. Ч.т.д.

3.3. Доказательство теорем для моделей обмена

Теперь можно подвести некоторый итог сказанному выше, т.е. завершить доказательство теорем и проиллюстрировать их смысл на простом примере.

Доказательство теоремы 1.. Для произвольного рынка $(\mathbf{u},\mathbf{w})$ из $\pi(E_\pitchfork)$ найдется пара $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in E_\pitchfork$ такая, что $(\mathbf{u},\mathbf{w}) = [\mathbf{v},\mathbf{w}]$. Из леммы 1. следует, что множество равновесных состояний рынка $(\mathbf{u},\mathbf{w}) = [\mathbf{v},\mathbf{w}] \in E$ содержится в объединении множеств $\Psi^{-1}_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(Z(I,K))$ по всем $I \subset L \times M$ и всем $K = \{K_i\}_{i=1}^m$, где $K_i \subset J_i, i \in M$. Согласно замечанию к лемме 4. это множество компактно. Если $(\mathbf{u},\mathbf{w}) \in E_\pitchfork$, то согласно предложению 2. множество $\Psi^{-1}_{\mathbf{u},\mathbf{w}}(Z(I,K))$ представляет собой подмногообразие, размерность которого равна нулю. Так как это многообразие еще и компактно, оно может быть только конечным или пустым множеством. Объединение таких множеств по всем I, K также не более, чем конечно.

Плотность множества $E_\pitchfork(I,K)$ в E при любых I,K следует из леммы 3., а его открытость – из леммы 5.. Множество $E_\pitchfork$ открыто и всюду плотно в E как пересечение конечного числа открытых всюду плотных множеств. Ч.т.д.

Принадлежность рынка из E/σ множеству $\pi(E_\pitchfork)$ естественно назвать условием общего положения для рынков. Покажем на простых примерах рынков в общем положении содержательный смысл теоремы, доказанной выше. Ограничимся для этой цели рынками с двумя участниками и двумя товарами. Во всех рассматриваемых ниже примерах предполагается, что общее количество каждого товара равно единице, т.е. $w_1 + w_2 = (1,1)$ и, следовательно, $x_1 = (1,1) - x_2$. Благодаря этому любое допустимое состояние рынка можно представить как точку в единичном квадрате двумерной плоскости. Вектор цен p определяет прямую на плоскости, проходящую в силу условия $p \cdot \bar{x}_i = p \cdot w_i$ через точки $\bar{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{w}$. Заштрихованные области плоскости на рисунках 1-4 соответствуют множествам $U_1(\bar{x}_1)$ и $U_2(\bar{x}_2)$, где

$$U_i(\bar{x}_i) = \{x_i \in I\!R^2_+ | u_i(x_i) \geq u_i(\bar{x}_i)\}, \;\; i = 1,2,$$

– множество потребительских наборов, более предпочтительных, чем $\bar{x}_i$ для агента i. Заметим, что это множество может включать такие наборы продуктов, которые не соответствуют никакому допустимому состоянию. В соответствии с этим, заштрихованные области на рисунках выходят за пределы ящика Эджворта [2, 6], т.е. – единичного квадрата. Из условий

$$u_i(\bar{x}_i) = \max\{u_i(x_i) | x_i \in I\!R^l_+; \bar{p} \cdot x_i \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot w_i\}, \;\; i \in M$$

следует, что прямая, определяемая вектором $\bar{p}$, является опорной гиперплоскостью к каждому из множеств $U_1(\bar{x}_1)$ и $U_2(\bar{x}_2)$, т.е. разделяет эти множества. В трех рассматриваемых ниже случаях (рис. 1-3) заштрихованные области можно разделить единственной гиперплоскостью. Если эта гиперплоскость проходит через $\mathbf{w}$, то $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{p})$ – равновесие. Отсюда ясно, почему такие равновесия изолированы.

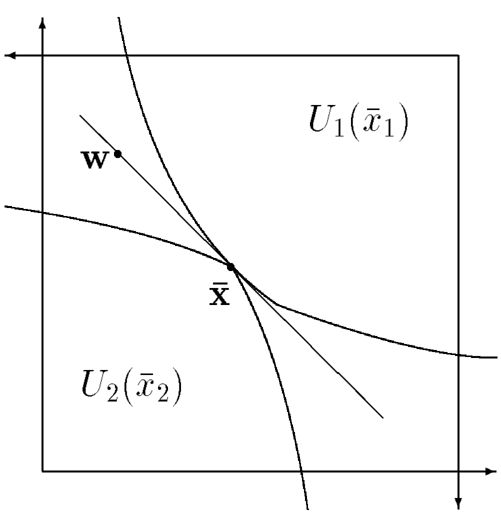

Рис. 1

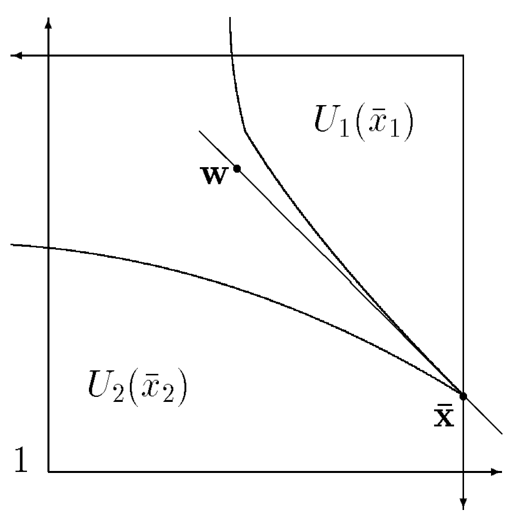

Рис. 2

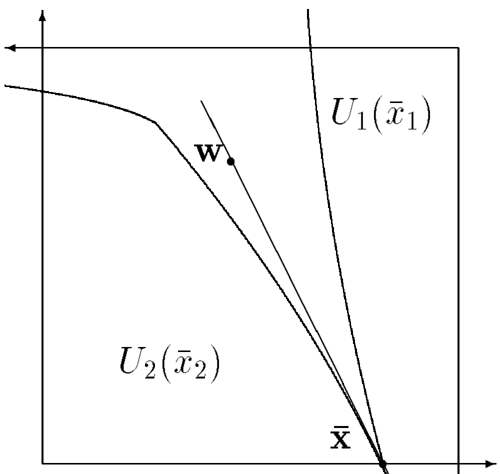

Рис. 3

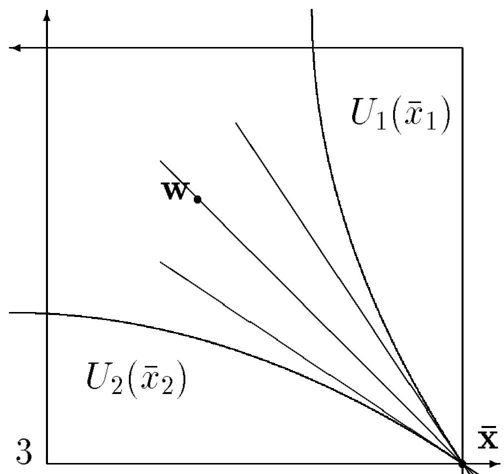

Рис. 4 Единственн

возможность неоднозначного определения разделяющей гиперплоскости для рынка с двумя торговцами и двумя продуктами, находящегося в общем положении, изображена на рисунке 4. Но здесь $\bar{\mathbf{x}}$ – вершина многогранника $X(\mathbf{w})$, а общее число его вершин конечно.

4. Конечность числа уравновешенных состояний в задачах векторной оптимизации

Предположение о конечности числа уравновешенных состояний в «общей ситуации» было высказано В.М. Полтеровичем [10]. Задача, решаемая в данном разделе, – придать этому высказыванию точный смысл и доказать его справедливость в сравнительно простом случае, когда задача векторной оптимизации может быть представлена тройкой дважды непрерывно дифференцируемых отображений $(f, u, g) = \varphi$ пространства $I\!R^l$ в $I\!R^n$ или в $I\!R^m$. Здесь

$$X(\varphi) = \{s \in I\!R^l \mid f_i(\alpha) \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$$

– множество допустимых альтернатив задачи φ. Отображение

$$u : I\!R^l \to I\!R^m$$

определяет набор основных критериев

$$U_k : X(\varphi) \to 2^{X(\varphi)}, \quad k \in M = \{1, \ldots, m\},$$

где множество

$$U_k(x) = \{y \in X(\varphi) \mid u_k(y) > u_k(x)\}$$

интерпретируется как совокупность состояний строго лучших, чем x по критерию с номером k. Обычно предполагается, что каждому k из M соответствует определенный экономический агент.

Состояние $s \in X(\varphi)$ называется Парето оптимальным, если

$$\bigcap_{k \in M \setminus j} clU_k(x) \bigcap U_j(x) = \emptyset, \quad \forall j \in M.$$

Поскольку множество всех Парето оптимальных альтернатив может оказаться практически необозримым, для принятия решения привлекаются дополнительные критерии, определяемые в данном случае отображением $g : I\!R^l \to I\!R^m$.

Состояние $\bar{x} \in X(\varphi)$ называется уравновешенным, если оно оптимально по Парето и удовлетворяет условиям:

$$g_k(\bar{x}) = g_j(\bar{x}) \quad \forall k, j \in M.$$

Состояние $\bar{x} \in X(\varphi)$ называется J-уравновешенным, если оно становится уравновешенным при замене M на $J \subset M$.

В целях упрощения обозначений положим $\bar{m} = n + 2m$, а пространство $C^2(I\!R^l, I\!R^{n+2m})$ условимся обозначать через $C^2(l, \bar{m})$. То же пространство, наделенное компактно-открытой топологией [14], обозначим через $C^2_w(l, \bar{m})$. Каждому отображению из этого пространства сопоставим задачу векторной оптимизации, интерпретируя соответствующим образом координатные функции, что позволяет говорить о $C^2_w(l, \bar{m})$ как о пространстве задач.

Теорема 3. *Найдется массивное подмножество W пространства $C^2_w(l, \bar{m})$, такое что для любого $\varphi \in W$ множество уравновешенных и J-уравновешенных состояний дискретно и замкнуто.*

Доказательство. Для доказательства теоремы можно воспользоваться струйной теоремой трансверсальности Тома [14], применяя ее к 1-струйным расширениям отображений из $C^2_W(l, \bar{m})$. Многообразие 1-струй удобно представить в виде

$$J^1(l, \bar{m}) = I\!R^l \times I\!R^{\bar{m}} \times L(l, \bar{m}),$$

где $L(l, \bar{m})$ – пространства матриц размерности $l \times \bar{m}$ или линейных операторов, действующих из $I\!R^l$ в $I\!R^{\bar{m}}$. Это пространство можно представить в виде прямой суммы подпространств меньшей размерности

$$L(l, \bar{m}) = L(I\!R^l, Y(I) \times I\!R^m) \bigoplus L(I\!R^l, Y(N \backslash I) \times I\!R^m),$$

где I – некоторое подмножество N и

$$Y(I) = \{y \in I\!R^n \mid y_i = 0, i \notin I\}.$$

Если $\mid I \mid$ – число элементов в I, то размерность многообразия

$$L(I\!R^l, Y(I) \times I\!R^m)$$

равна $l \times (\mid I \mid + m)$. Более того, оно изоморфно пространству матриц размерности $(\mid I \mid + m) \times l$. Благодаря этому стратификация пространства $L(l, \mid I \mid + m)$ по рангам матриц порождает стратификацию пространства $L(l, \bar{m})$, причем страту пространства

$$L(I\!R^l, Y(I) \times I\!R^m),$$

состоящему из матриц ранга r и имеющему коразмерность

$$(l - r) \times (m + \mid I \mid - r)$$

[16], соответствует страт той же коразмерности в пространстве $L(l, \bar{m})$. Обозначим его через $L_r(I)$. Стратификация подмногообразия

$$Z(I) = I\!R^l \times [Y(N \backslash I) \times I\!R^m \times \Delta] \times L(l, \bar{m})$$

в соответствующем представлении многообразия 1-струй $J^1(l, \bar{m})$ состоит из стратов вида

$$Z_r(I) = I\!R^l \times [Y(N \backslash I) \times I\!R^m \times \Delta] \times L_r(I).$$

Коразмерность $Z_r(I)$ вычисляется по формуле

$$codim Z_r(I) = \mid I \mid + m - 1 + (l - r) \times (\mid I \mid + m - r).$$

Множество отображений из $C^2_w(l, \bar{m})$, струйные расширения которых трансверсальны всем стратифицированным подмногообразиям $Z(I)$ при различных $I \subset N$, обозначим через W_M. По струйной теореме трансверсальности Тома это множество массивно в $C^2_w(l, \bar{m})$.

Пусть теперь $\bar{x}$ – уравновешенное состояние задачи векторной оптимизации $\varphi = (f, u, g)$ из W_M. Тогда

$$\varphi(\bar{x}) \in Y(N \backslash \bar{I}) \times I\!R^m \times \Delta,$$

где

$$\bar{I} = \{i \in N \mid f_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Из Парето оптимальности $\bar{x}$ следует его локальная Парето оптимальность, т.е. пересечение конусов

$$K_0 = \{x \in I\!R^l \mid D^1 f_i(\bar{x}) \cdot x > 0, \forall i \in \bar{I}\}$$

и

$$K_j = \{x \in I\!R^l \mid D^1 u_i(\bar{x}) \cdot x > 0\}, \quad j = 1, \ldots, m$$

состоит из единственной точки

$$O \in I\!R^l.$$

При этом конусы K_j для всех $j = 1, \ldots, m$ открыты. По теореме Дубовицкого и Милютина о пересечении конусов отсюда следует существование таких $\alpha \in I\!R^l_+$ и $\beta \in I\!R^m_+$, что $\alpha_i = 0$ при $i \notin I$ и

$$\sum{}_{i=1}^{n} \alpha_i D^1 f_i(\bar{x}) + \sum{}_{j=1}^{m} \beta_j D^1 u_i(\bar{x}) = 0,$$

причем α и β не могут быть равны нулю одновременно. Иными словами, матрица, составленная из векторов

$$D^1 f_i(\bar{x}), \quad i \in I; \qquad D^1 u_j(\bar{x}), \quad j \in M,$$

имеет ранг не выше $m+ \mid I \mid -1$. Но тогда $j^1\varphi(\bar{x})$ принадлежит одному из стратов подмногообразия $Z(\bar{I})$ коразмерности не менее l, так как при $\bar{r} = m+ \mid I \mid -1$ имеем

$$codim Z_{\bar{r}}(\bar{I}) = \mid I \mid + m - 1 + (l - m - \mid I \mid + 1) = l.$$

Но поскольку $j^1\varphi$ трансверсально данному страту, коразмерность его прообраза также не меньше l; следовательно, размерность прообраза отрицательна или равна нулю. В первом случае прообраз пуст, во втором – дискретен. Кроме того, прообраз каждого страта коразмерности l замкнут.

Действительно, из непрерывности отображения $j^1\varphi$ следует, что замыкание произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^l$ содержится в прообразе замыкания своего образа

$$clA \subset (j^1\varphi)^{-1} cl(j^1\varphi(A)).$$

С другой стороны, замыкание каждого страта состоит из него самого и стратов меньших размерностей, прообразы которых пусты, так как имеют коразмерность больше l. Положив

$$A = (j^1\varphi)^{-1}(Z_{\bar{r}}(\bar{I})),$$

где $Z_{\bar{r}}(\bar{I})$ – рассматриваемый страт, получим

$$clA \subset (j^1\varphi)^{-1} cl(Z_{\bar{r}}(\bar{I})) = (j^1\varphi)^{-1}(Z_{\bar{r}}(\bar{I})) = A,$$

что возможно только при условии замкнутости A. Таким образом, все уравновешенные состояния задачи φ содержатся в прообразах стратов подмногообразия

$$Z = \bigcup_{I \subset N} Z(I),$$

коразмерность которого в точности равна l. Прообраз каждого такого страта дискретен и замкнут, а их общее число конечно. Отсюда следует дискретность и замкнутость множества уравновешенных состояний задачи $\varphi \in W_M$.

Аналогичным образом для каждого $J \subset M$ строится массивное подмножество W_J пространства $C^2_w(l, \bar{m})$ так, что каждому φ из W_J соответствует пустое или дискретное множество J-уравновешенных состояний. Пересечение всех таких множеств, включая W_M, обозначим через W. Это множество удовлетворяет всем условиям теоремы. Ч.т.д.

Замечание. Стратифицированные подмногообразия $Z(I)$, построенные в доказательстве теоремы, удовлетворяют условию регулярности Уитни [19]. Поэтому множество W открыто и всюду плотно в топологии Уитни; в частности, открыто в $C^2_s(l, \bar{m})$ [11].

5. Конечность числа равновесий в экономике с двухэтапным ценообразованием и эндогенным техническим прогрессом

5.1. Пространство моделей и определение равновесия

Исследуемая в этом разделе модель экономического равновесия с двухэтапным ценообразованием и эндогенным техническим прогрессом до настоящего времени не описана в литературе, если не считать краткого описания в [25] и упрощенного варианта в [26]. Поэтому ее описание здесь сопровождается достаточно подробными пояснениями, раскрывающими смысл вводимых переменных и соотношений. Формальное описание модели в виде системы функциональных уравнений состоит из трех блоков, именуемых равновесием в потреблении, производственным равновесием и связующим блоком, который включает материальный и финансовый балансы. Соответственно, на три блока естественно разделить и описание отдельной экономики как элемента пространства экономик. Каждая такая экономика состоит из сектора потребления, включающего m потребителей, производственного сектора, представленного в агрегированном виде, без разделения его на отдельные фирмы, а также функции распределения доходов, получаемых в виде прибыли производственного сектора и выручки от продажи начальных запасов. Каждый из трех названных блоков может быть описан в терминах отображений класса C^1, определенных на различных подмножествах пространства переменных модели. Число таких переменных существенно больше, чем в модели обмена. В этой связи необходимо ввести ряд дополнительных обозначений и уточнить структуру пространства переменных модели.

Как и в модели обмена допустимым набором продуктов считается любой неотрицательный l-мерный вектор. Множество допустимых потребительских наборов для каждого потребителя совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Однако, с точки зрения производства все продукты подразделяются на производимые и невоспроизводимые, т.е. ресурсы. Иными словами, множество всех наименований продуктов $L = \{1, \ldots, l\}$ может быть представлено в виде $L = \hat{L} \cup \check{L}$, где $\hat{l} = |\hat{L}|$, $\check{l} = |\check{L}|$ – число наименований воспроизводимых и невоспроизводимых продуктов, соответственно, причем $\hat{l} + \check{l} = l$. Соответствующие подпространства в $I\!R^l \equiv I\!R^L$ определяются и обозначаются далее как

$$I\!R^{\hat{L}} \equiv I\!R^l(\hat{L}) \equiv \{\xi \in I\!R^l | \xi_k = 0, \forall k \notin \hat{L}\}$$

и

$$I\!R^{\check{L}} \equiv I\!R^l(\check{L}) \equiv \{\xi \in I\!R^l | \xi_k = 0, \forall k \notin \check{L}\}.$$

Пространство линейных операторов, действующих из $I\!R^L$ в $I\!R^{\check{L}}$ и оставляющих на месте векторы из $I\!R^{\check{L}}$, обозначается через $I\!B^{\check{L}}$. Начальные запасы продуктов в экономике представлены вектором $\omega \in I\!R^{\check{L}}_+ \subset I\!R^l_+$, т.е. изначально в экономике имеются только невоспроизводимые продукты.

Для идентификации технологического уровня, достигнутого в производственном секторе модели, используется формальный параметр $t \in T \subset I\!R^n$, скалярные компоненты которого именуются индексами НТП. Отсюда вовсе не следует необходимость трактовать t в терминах количества. Гораздо естественнее рассматривать T как частично упорядоченное множество, погруженное в $I\!R^n$. Такая трактовка очень удобна технически и вполне объяснима в терминах затрат на НТП и снижения ресурсоемкости технологий [27]. Каждому значению $t \in T$ соответствуют вектор $A(T) \in I\!R^{\check{L}}_+$ и $l \times l$-матрица $B(t) \in I\!B^{\check{L}}$, которые следует понимать как затраты ресурсов на достижение заданного технологического уровня t (затраты на НТП) и матрицу текущих производственных затрат ресурсов при заданном уровне t. При этом естественно ожидать, что компоненты $A(t)$ монотонно возрастают, а коэффициенты $B(t)$ монотонно убывают по t, причем те и другие – функции класса C^1, определенные на некоторой окрестности $V(T)$ множества T. Отсюда следует возможность для интерпретации погружения T в пространство $I\!R^n$.

Если в экономике есть только один невоспроизводимый ресурс, то можно параметризовать уровни технологического развития по затратам этого ресурса. При такой параметризации вектор $A(t)$ имеет только один ненулевой элемент равный t. Если производимый продукт также только один, т.е. $l = 2, \quad \hat{l} = \check{l} = 1$, то возможна параметризация по эффективности использования ресурса. В самом деле, матрица текущих затрат представима в виде

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы состоит из нулей, так как затраты производимого продукта всегда равны нулю. Невоспроизводимый продукт формально можно считать производимым из него самого по тривиальной технологии, поэтому в нижнем правом углу матрицы стоит единица. Наконец, производство единственного производимого продукта требует затрат $b(t)$ единиц невосприводимого. Параметризация по эффективности использования ресурса означает, что $b(t) = 1/t$. В общем случае таких простых параметризаций нет, но предположение о том, что T погружено в $I\!R^n$ вполне допустимо. В результате присоединения $I\!R^n \supset T$ пространство продуктов $I\!R^l$ расширено до $I\!R^{l+n}$.

Для описания системы цен в модели с m потребителями необходимы $l + mn + n$ переменных, среди которых $l + mn - 1$ переменных независимы. При двухэтапном ценообразовании потребитель платит не только за приобретаемые продукты, но и за вход на рынок, т.е. за право покупать продукты по текущим рыночным ценам. Такой порядок расчетов и цен известен в теории игр как двойной тариф [28], а в теории прав собственности – как поэлементное ценообразование [29]. В рассматриваемой модели он конкретизирован для случая, когда требуется совместить строгое следование принципам маржинализма при назначении текущих цен на производимые продукты с возмещением через цены затрат на НТП. Текущие цены производимых продуктов исчисляются на основе предельных затрат, которые при заданном t определяются матрицей $B(t)$ и ценами на ресурсы. Иначе говоря, текущие цены $p \in S^{l-1}$ при заданном t должны у довлетворять равенству $p \cdot B(t) = p$ или, что то же самое, $p \cdot B(t)\xi = p \cdot \xi$ при любом $\xi \in I\!R^l$. Цена входа на рынок для произвольного потребителя $i \in M$ исчисляется по формуле $q_i \cdot t$, где q_i – неотрицательный n-мерный вектор. Иными словами, цена входа на рынок персональна для каждого потребителя и зависит от t. Далее для краткости вместо $(q_1, \ldots, q_m)$ иногда используется обозначение $\mathbf{q}$. Аналогичным образом для обозначения ml-мерного вектора $(p, \ldots, p) \in (I\!R^l)^m$ используется обозначение $\mathbf{p}$. Сумма платежей за вход на рынок от всех потребителей исчисляется по формуле $q \cdot t = \sum_{i=1}^m q_i \cdot t$. Вектор $q \equiv \sum_{i=1}^m q_i$ нет смысла рассматривать как набор самостоятельных переменных, так как при заданном $\mathbf{q}$ он однозначно вычисляется, а необоснованное увеличение числа переменных модели приводит только к излишней громоздкости построений при доказательстве теорем. Однако использование таких вспомогательных переменных имеет смысл для сокращения записи некоторых конструкций. При этом надо четко различать n-мерный вектор q и mn-мерный вектор $\mathbf{q}$.

Потребительский сектор экономики включает m потребителей с номерами $i \in M$ и предпочтениями, заданными на $I\!R^l_+$ с помощью отображений обратного спроса [9]. Иначе говоря, предпочтения произвольного потребителя i определяются вектор-функцией $g_i : I\!R^l_+ \to S^{l-1}$, сопоставляющей произвольному продуктовому набору $\tilde{x}_i$ вектор цен $\tilde{p} = g_i(\tilde{x}_i)$, при котором этот набор будет наиболее предпочтительным для данного потребителя. Множество потребительских наборов, более предпочтительных для данного потребителя, чем набор $\tilde{x}_i$ определяется как

$$U_i(\tilde{x}_i) = \{x_i \in I\!R^l_+ | g_i(\tilde{x}_i) \cdot x_i > g_i(\tilde{x}_i) \cdot \tilde{x}_i\}.$$

Для краткости будем писать $\mathbf{g}$ вместо $(g_1, \ldots, g_i)$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_m)$, вместо $(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m))$. Кроме того, положим $x \equiv \sum_{i=1}^m x_i$.

Равновесием потребителя i при заданных ценах $\bar{q}_i \in R^n_+$, $\bar{p} \in S^{l-1}_+$ и доходе $\bar{r}_i \in R$ называется пара $\bar{x}_i), (\bar{t}_i$, удовлетворяющая условиям:

$$\textbf{(i)} \quad U_i(\bar{x}_i) \bigcap \{x_i \in I\!R^l_+ | \bar{p} \cdot x_i + \bar{q}_i \cdot \bar{t}_i \le \bar{r}_i\} = \emptyset$$

$$\textbf{(ii)} \quad \bar{t}_i \in Arg \min_{t \in V(T)} [\bar{p} \cdot B(t) \bar{x}_i + \bar{q}_i \cdot t].$$

В данном определении существенно, что потребитель выбирает набор продуктов, считая фиксированными не только цены, но и технологию. Выбирая технологию, он также считает заданными цены и, кроме того, считает заданным потребляемый набор продуктов. Вообще говоря, таких равновесий больше, чем «сильных» равновесий потребителя, когда предполагается оптимизация потребительского выбора сразу по x_i и по t. Но в данном случае это не очень существенно, так как конечная цель – показать, что число равновесий конечно. Этот результат будет тем сильнее, чем слабее требования, предъявляемые к равновесию.

Описание производственного сектора экономики составляют вектор-функция $A(t)$ и оператор $B(t)$.

Производственным равновесием называется тройка

$$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t}) \in S^{l-1} \times I\!R^n \times T,$$

удовлетворяющая условиям:

$$(\mathbf{iii}) \quad \bar{t} \in Arg \max_{t \in T} [\bar{q} \cdot t - \bar{p} \cdot A(t)];$$

$$(\mathbf{iv}) \quad \bar{p} = \bar{p} \cdot B(\bar{t}).$$

В этом определении формализована идея максимизации прибыли производственного сектора при заданных $\bar{p} \in S^{l-1}$ и $\bar{q} \in I\!R^n$. Если $\bar{q} = \sum_{i=1}^m \bar{q}_i$, то условие (**iii**) означает максимизацию прибыли от продажи прав на покупку продуктов по ценам предельных издержек производства. Прибыль от производства продуктов $p \cdot x - p \cdot B(t)x$ тождественно равна нулю в силу условия (**iv**). Прибыль от продажи прав может быть ненулевой.

Снижение текущих рыночных цен, достигаемое за счет технического прогресса, сопровождается ростом затрат на НИР и ОКР, а также ростом цен за вход на рынок. Суммарная плата за вход на рынок, взимаемая со всех потребителей, должна покрывать сумму затрат на НИР и ОКР, что позволяет замкнуть модель.

Связующий блок экономики состоит из вектора начальных запасов $\omega \in I\!R^{\check{L}}$ и отображения распределения прибыли

$$r : S^{l-1} \times I\!R^n \times I\!R_+^{\check{L}} \times T \to I\!R^m,$$

сопоставляющего четверке (p, q, ω, t), где $q = \sum_{i=1}^m q_i$, вектор

$$r(p, q, \omega, t) = (r_1(p, q, \omega, t), \ldots, r_m(p, q, \omega, t)) \in I\!R^m,$$

где $r_i(p, q, \omega, t)$ – бюджет потребителя i. Отображение r должно удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^m r_i(p, q, \omega, t) = q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega,$$

называемому иногда законом Вальраса [30]. Иначе говоря, распределению между потребителями подлежит в точности та сумма, которая может быть выручена от реализации прав на покупку продуктов по текущим ценам и от реализации ресурсов. (Производство и реализация продуктов по ценам предельных издержек, как уже говорилось выше, всегда дает нулевую прибыль, которую здесь можно не учитывать.) Кроме того данное отображение должно быть класса C^1. Поэтому надо с самого начала предположить, что задано гладкое разложение единицы

$$e_r \in C^1(S^{l-1} \times I\!R^n \times I\!R_+^{\check{L}} \times T, P_+^M),$$

сопоставляющее четверке (p, q, ω, t) вектор

$$e_r(p, q, \omega, t) \in P_+^M,$$

т.е. неотрицательный n-мерный вектор, сумма компонент которого равна единице. Тогда отображение распределения прибыли определяется равенством

$$r(p, q, \omega, t) = [q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega] e_r(p, q, \omega, t).$$

Экономику можно представить как произвольный элемент

$$\varepsilon = (\mathbf{g}, (A, B), \omega, e_r)$$

пространства

$$\mathcal{E} = [C_w^1(I\!R_+^l, S^{l-1})]^m \times [C_w^1(T, I\!R^{\check{L}}) \times C_w^1(T, I\!B^{\check{L}})] \times I\!R^{\check{L}} \times C^1(S^{l-1} \times I\!R^n \times I\!R_+^{\check{L}} \times T, P_+^M).$$

Состояние экономики в целом описывается четверкой

$$(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{t}) \in Y = S^{l-1} \times (I\!R^n)^m \times (I\!R_+^l)^m \times T^m,$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Кроме того, долее предполагается (по определению) что

$$t = \bigvee_{i=1}^{m} t_i.$$

Многообразие Y далее называется пространством состояний экономики, а его произвольный элемент обозначается через $\mathbf{y}$.

Состояние экономики $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ сбалансировано по материальным ресурсам, если выполнено условие

$$(\mathbf{v}) \quad B(\bar{t})\bar{x} + A(\bar{t}) \leq \omega; \quad \bar{t}_i = \bar{t} \quad \forall i \in M.$$

Первое из соотношений, входящих в условие $(\mathbf{v})$, можно записать и в несколько иной форме:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \in XT(\omega) = \{(\mathbf{x}, t) \in (I\!R_+^l)^m \times T | B(t)x + A(t) \leq \omega\}.$$

Второе условие означает, что сбалансированное состояние экономики можно с самого начала искать в виде $y = (p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t)$, имея в виду, что вектор $\mathbf{t}$ получается из t путем реплицирования.

Состояние $\bar{y} = (\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ или получаемое из него $\bar{\mathbf{y}}$ сбалансировано по финансам, если выполняется равенство

$$(\mathbf{vi}) \quad \bar{p} \cdot [\sum_{i+1}^{m} B(\bar{t})\bar{x}_i + A(\bar{t})] = \bar{p} \cdot \omega.$$

Если не предполагать заранее, что $\bar{t}_i = \bar{t}$ для каждого $i \in M$, то баланс по финансам надо записать в более сильной форме, дополнив его условием

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{q}_i \cdot \bar{t}_i = \bar{q} \cdot \bar{t}.$$

Содержательно такая постановка вопроса даже боле интересна, но последующие рассуждения становятся более громоздкими. Поэтому далее состоянием экономики именуется y и подразумевается, что его можно развернуть до $\mathbf{y}$ путем заменой t на получаемый и него вектор $\mathbf{t}$.

Состоянием общего равновесия экономики $(g, (A, B, \omega), e_r) \in E$ называется четверка $(\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$, удовлетворяющая при

$$\bar{r} = r(\bar{p}, \bar{q}, \omega, \bar{t}), \quad \text{где } \bar{q} \equiv \textstyle\sum_{i=1}^{m} \bar{q}_i; \quad \bar{x} \equiv \textstyle\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i;$$

условиям $(\mathbf{i}) - (\mathbf{vi})$, т.е. такая, что для каждого $i \in M$ пара $(\bar{x}_i, \bar{t})$ – равновесие потребителя i при бюджете $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\omega}, \bar{t})$ и ценах $\bar{p}$, $\bar{q}_i$, а тройка $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t})$ – производственное равновесие и, кроме того, выполняются условия сбалансированности по материальным ресурсам и по финансам.

Теорема 4. *В пространстве экономик $\mathcal{E}$ существует открытое всюду плотное подмножество $\mathcal{E}_{\pitchfork}$ такое, что множество состояний общего равновесия для любой экономики из $\mathcal{E}_{\pitchfork}$ конечно.*

Доказательство теоремы 4. опирается на серию лемм, собранных в следующем подразделе и аналогичных по содержанию леммам 1. – 5. из подраздела 3.2., но не сводимых к ним.

5.2. Вспомогательные леммы

Пусть обозначения $I, X(I), X^{\perp}(I)$ имеют тот же смысл, что в разделе 3. Через J обозначим произвольное подмножество множества N и сопоставим ему подмножества

$$T(J) = \{t \in T | (\check{t}_j - t_j)(\hat{t}_j - t_j) = 0, \forall j \notin J\}$$

и

$$T^{\perp}(J) = \{t \in T | (\check{t}_j - t_j)(\hat{t}_j - t_j) = 0, \forall j \in J\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$. Аналогичным образом, через L_0 обозначим подмножество множества L и сопоставим ему подмножества

$$\mathbb{R}^l(L_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^l | \xi_k = 0, \forall k \notin L_0\}$$

и

$$\mathbb{R}^l(L \backslash L_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^l | \xi_k = 0, \forall k \in L_0\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^l$. В $(ml + ml) + mn + (n + n) + (l - 1) + l + (m - 1)$-мерном многообразии

$$Z = (\mathbb{R}^l)^m \times (\mathbb{R}^l)^m \times (\mathbb{R}^n)^m \times (\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times S^{l-1} \bigcap \mathbb{R}^l{}_+ \times R^l \times \mathbb{R}^m / \underline{\Delta}$$

каждой тройке (L_0, I, J) сопоставим полуалгебраическое множество

$$Z(L_0, I, J) \equiv \prod{}_{\nu=1}^{4} Z_\nu$$

$$Z_1(L_0, I, J) = X^{\perp} \times X_+(I) \in (\mathbb{R}^l)^m \times (\mathbb{R}^l)^m$$

$$Z_2(L_0, I, J) = 0 \in (\mathbb{R}^n)^m$$

$$Z_3(L_0, I, J) = T^{\perp}(J) \times T(J)$$

$$Z_4(L_0, I, J) = [S^{l-1} \bigcap \mathbb{R}^l_+(L_0)] \times \mathbb{R}^l(L \backslash L_0) \times O,$$

размерность которого равна $ml + n + l - 1$. Соответственно, дефектная размерность равна $ml + mn + n + l - 1$ Для каждой экономики

$$\varepsilon = (g, A, B, \omega, e_r)$$

отображение $G_\varepsilon : Y \to Z$ определим соотношением

$$G_\varepsilon(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = \prod_{\nu=1}^{4} G_{\varepsilon\nu}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t),$$

где

$$G_{\varepsilon 1}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}, \mathbf{x}) \in (I\!R^l)^m \times (I\!R^l)^m,$$

$$G_{\varepsilon 2}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = (q_1 - D^1 p \cdot B(t)x_1, \ldots, q_m - D^1 p \cdot B(t)x_m) \in (I\!R^n)^m,$$

$$G_{\varepsilon 3}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = (q - D^1 p \cdot A(t), t) \in I\!R^n \times I\!R^n,$$

$$G_{\varepsilon 4}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = (p, \omega - B(t)x - A(t), r(p, q, \omega, t) - \{p \cdot B(t)x_i + q_i \cdot t\}_{i=1}^m),$$

а

$$r(p, q, \omega, t) \equiv [q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega] e_r(p, q, \omega, t)$$

и, следовательно,

$$(p, \omega - B(t)x - A(t), r(p, q, \omega, t) - \{p \cdot B(t)x_i + q_i \cdot t\}_{i=1}^m) \in S^{l-1} \times I\!R^l \times I\!R^m / \underline{\Delta}.$$

Лемма 6. *Если $\bar{y} = (\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$, – состояние общего равновесия в экономике $(g, (A, B, \omega), e_r) \in \mathcal{E}$, то найдутся такие $\bar{I} \subset M \times L$ и $\bar{J} \subset N$, что*

$$G_\varepsilon(\bar{y}) \in Z(\bar{L}_0, \bar{I}, \bar{J}).$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{L}_0 = \{k \in \check{L} | \bar{p}_k \neq 0\},$$

$$\bar{I} = \{(ik) \in M \times L | \bar{x}_{ik} = 0\},$$

$$\bar{J} = \{j \in N | (\check{t}_j - \bar{t}_j)(\hat{t}_j - \bar{t}_j) \neq 0\}.$$

Из определения множеств $\bar{L}_0$, $\bar{I}$, $\bar{J}$ сразу следует

$$\bar{p} \in [S^{l-1} \bigcap I\!R^l_+(\bar{L}_0)],$$

$$\mathbf{x} \in X(\bar{I}), \qquad X^\perp(\bar{I}) = \Gamma^+(\mathbf{x}) = \prod\nolimits_{i=1}^m \Gamma^+(\bar{x}_i),$$

$$\bar{t} \in T(\bar{J}), \qquad T^\perp(\bar{J}) = \Gamma^+(\bar{t}).$$

Из условий индивидуальной рациональности (**i**) при выборе набора продуктов $\bar{x}_i$ с учетом нормировки вектора цен и выбора отображений g_i следует

$$[g_i(\bar{x}_i) - p] \in \Gamma^+(\bar{x}_i) \quad \forall i,$$

поэтому

$$[\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}] \in \Gamma^+(\bar{\mathbf{x}}) = X^\perp(\bar{\mathbf{x}}).$$

Отсюда с учетом доказанного выше следует

$$G_{\varepsilon 1}(\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, t) \in X(\bar{I}) \times X^\perp(\bar{I}).$$

$$G_{\varepsilon 1}(\bar{y}) \in S^{l-1} \bigcap I\!R^l(\bar{L}_0) \times X(\bar{I}) \times T(\bar{J}).$$

Условие (**ii**) эквивалентно равенству

$$(\mathbf{ii}') \quad \bar{q}_i = D^1\bar{p} \cdot B(\bar{t})\bar{x}_i.$$

Поскольку такие равенства выполняются для всех i, получим

$$G_{\varepsilon 2}(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) = (q_1 - D^1 p \cdot B(t)x_1, \ldots, q_m - D^1 p \cdot B(t)x_m) = O \in (I\!R^n)^m$$

Из условий $\bar{p} \in I\!R^l_+$, (**v**) и (**vi**) следует, что ненулевым ценам на ресурсы соответствуют точные равенства в материальном балансе. Если некоторый ресурс имеется в избытке, то цена на него равна нулю. Иными словами

$$[\omega - B(\bar{t})\bar{x} - A(\bar{t})] \in I\!R^l(L \backslash \bar{L}_0),$$

$$G_{\varepsilon 3}(\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = (\bar{q} - D^1\bar{p} \cdot A(\bar{t}), \bar{t}) \in T(\bar{J}) \times T^\perp(\bar{J}).$$

С учетом финансового баланса (**vi**) и определения отображения r бюджетное ограничение для каждого $i \in M$ выполняется в виде равенства

$$\bar{p} \cdot B(\bar{t}) + \bar{q}_i \cdot \bar{t} = \bar{r}_i$$

для каждого $i \in M$ можно переписать в виде равенств

$$\bar{p} \cdot B(\bar{t})\bar{x}_i + \bar{q}_i \cdot \bar{t} = \bar{r}_i.$$

С учетом сказанного выше отсюда следует

$$G_{\varepsilon 4}(\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \in S^{l-1} \times O \times O.$$

Таким образом, выполняется утверждение леммы. Ч.т.д.

Пусть

$$\rho : \mathcal{E} \to C^1(Y, Z)$$

– представление, определяемое равенством $\rho(\varepsilon) \equiv \rho_\varepsilon = G_\varepsilon$, а

$$ev_\rho : E \times Y \to Z$$

– соответствующее ему эволюционное отображение, определяемое соотношением

$$ev_\rho(\varepsilon, y) = G_\varepsilon(y).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Эволюционное отображение*

$$ev_\rho : \mathcal{E} \times Y \to Z$$

является субмерсией.

Доказательство. Аналогично лемме 2. из раздела 3.

Лемма 8. *Для любых*

$$e \in \mathcal{E}, \quad (L_0, I, J) \subset \check{L} \times [M \times L] \times N$$

множество $G_\varepsilon^{-1}[(Z(L_0, I, J)]$ *компактно в* Y.

Доказательство. Доказывается, что при любом $\varepsilon \in \mathcal{E}$ множество $XT(\omega)$ компактно в $(R_+^l)^m \times T$. Отсюда с учетом непрерывности всех отображений следует ограниченность нужного множества и его замкнутость, т.е. компактность. Ч.т.д.

Лемма 9. *Множество*

$$E_\pitchfork = \{\varepsilon \in \mathcal{E} | G_\varepsilon \pitchfork Z(L_0, I, J), \forall (L_0, I, J)\}$$

всюду плотно в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Аналогично лемме 4. из раздела 3.

Лемма 10. *Множество* $\mathcal{E}_\pitchfork$ *открыто в* E.

bf Доказательство. Аналогично лемме 5. из раздела 3.

5.3. Доказательство Теоремы

Из утверждения леммы 6. следует, что образ каждого состояния равновесия $\bar{y} = (\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$, в экономике

$$\varepsilon = (g, (A, B, \omega), e_r) \in \mathcal{E}$$

при отображении G_ε попадает в множество

$$\bigcup Z = \bigcup Z(\bar{L}_0, \bar{I}, \bar{J}),$$

где объединение берется по всем $\bar{I} \subset M \times L$ и $\bar{J} \subset N$. Прообраз множества $\bigcup Z$ в Y компактен в силу леммы 8.. Если при этом отображение G_ε трансверсально каждому множеству $Z(\bar{L}_0, \bar{I}, \bar{J})$, то прообраз множества $\bigcup Z$ имеет в Y ту же дефектную размерность $ml + mn + n + l - 1$, что множество $\bigcup Z$ в Z. Следовательно, прообраз дискретен, так как его размерность равна нулю. Так как он еще и компактен в силу доказанного выше, то он состоит из конечного числа изолированных точек. Таким образом, множество равновесий содержится в конечном множестве и, следовательно, конечно. Ч.т.д.

Литература

[1] Дебре Дж. Четыре аспекта математической теории экономического равновесия// УМН, 1975, т. 32, N 1, с. 133-144.

[2] Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983.

[3] Dirker P. Topological Methods in Walrasian Economics. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1974.

[4] Balasko Y. Badget Constrain Pareto-Efficient Allocations. – J.Economic Theory, 1979, v.21, N 3,p.359-379.

[5] Debreu G. Economics with a finite set of equilibrium. – Econometrica, 1970, v. 38, p. 387-392.

[6] Smale S. Global analysis and economics IIA: Extention of a theorem of Debreu//J.Math.Econom., 1974, v.1, N 1.

[7] Geldrop van J.H. Extention of a theorem of Smale on equilibria for pure exchange economics//J.Math.Econ., 1978, v.5, N 3, p.245-255.

[8] Kehoe T.J.Regular production economics//J.Math.Econ.,1982, v.10, N 2/3, p.147-176.

[9] Козырев А.Н. Равновесные решения задач многоцелевой оптимизации. - Новосибирск, 1984. – 16 с. (Препринт ИМ СО АН СССР: 76).

[10] Полтерович В.М. Уравновешенные состояния в задачах векторной оптимизации//Автоматика и телемеханика, 1984, N 5, с. 89-96.

[11] Мазер Дж. Стратификации и отображения// УМН, 1972, т. 27, N 5, с.85-118.

[12] Митягин Б.С. Заметки по математической экономике// УМН, 1972, т. 25, N3, с.3-19.

[13] Abraham R., Robbin J. Transversal mappings and flows. – New York, Amsterdam: W.A.Benjamin Inc. 1967.

[14] Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979.

[15] Вершик А.М., Черняков А.Г. Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето – Смейлу. – Оптимизация, 1982, вып. 28(45), с.112-146.

[16] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. – М.: Наука, 1982.

[17] Witney H. Tangents to an analitic varieties. – Ann. of Math., 1984, v.81, N3, p.496-549.

[18] Witney H. Local Propertties of analitic varieties. – Differentable and Combinatorial Topology, Princeton University Press, 1965.

[19] Trotman D.J.A. A transversality property weaker then Witney A-regularity// Bull. London Math. Soc., 1977, v.8, part 3, N 25, p.225-228.

[20] Wan Y.H. On the structure and stability of local Pareto optima in pure exchange economy//J.Math.Econ., 1978, v.5, N 3, p.225-274.

[21] Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, 1974.

[22] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.: Наука, 1977.

[23] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.

[24] Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. - М.: Наука, 1981.

[25] Козырев А.Н. Общее равновесие в экономике с рынками продуктов и лицензий: Тезисы доклада на всесоюзном семинаре «Социально экономические процессы» Кишенев, 1989. – с.163,164.

[26] Козырев А.Н. Оценка интеллектуальной собственности. М., «Экспертное бюро-М», 1997.

[27] Griliches Z. Patent Statistics as Economic Indicators: A Survey// Journal of Economic Literature. Vol. XXYIII. December 1990, pp.1661-1707.

[28] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. (перевод с английского издания. Moulin 1988 H. , Axioms of cooperative decision making. – Cambridge University Press, 1988.)

[29] Р.Коуз, «Фирма, рынок и право». – Нью-Йорк: Телекс, 1991.

[30] Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства. – В кн.: Современные проблемы математики. Т. 19/Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР/. М., 1982, с. 23-58. с.549-553.